DODATAK I

ELIPTIČNE FUNKCIJE

1. Periodične funkcije

Kompleksnu funkciju f zovemo periodičnom, ako postoji broj $T\neq0$ takav da za sve vrijednosti z iz domene vrijedi

$f(z+T)=f(z)$

Konstantu T zovemo periodom funkcije f.

TM 1.1

Ako su $T_1,T_2, \ldots ,T_k$, (k>0) periodi funkcije f(z), tada je bilo koja njihova linearna kombinacija sa cijelim koeficijentima

$T=n_1T_1+\ldots+n_kT_k$

također period te funkcije

DZ Višestruko pojavljivanje perioda u argumentu funkcije ne mijenja njenu vrijednost. Uz to je $f(z-T_i)=f(z-T_i+T_i)=f(z)$

LEMA

Skup perioda meromorfne funkcije $f(z)\neq$const ne sadrži niz koji konvergira konačnoj točki u **C**

DZ Pretpostavimo da postoji niz perioda T_i što konvergira k T i neka je z_o proizvoljna regularna točka od f. Niz $\mathcal{T}_i=T_{i+1}-T_i$ koji konvergira k nuli je po TM 1 opet niz perioda od f. Tako je za proizvoljni i=1,2,...

$f(z_o+\mathcal{T}_i)=f(z_o)$

No niz točaka $z_i=z_o+\mathcal{T}_i$ konvergira k z_o i u točkama tog niza f ima istu vrijednost, pa prema TM o jedinstvenosti analitičke funkcije vrijedi f(z)=const

TM 2.1 (Abel)

Meromorfna funkcija f(z) može imati najviše dva linearno nezavisna perioda tj. postoje najviše dva perioda τ i τ' takva da je bilo koji period T od f oblika

$T=n\tau+n'\tau'$

gdje su n,n' cijeli brojevi

DZ Uzmimo pravac L kroz ishodište kompleksne ravnine na kojem leži bar jedan period T_o. Pokažimo da je skup svih perioda od f koji leže na L oblika

$$T=n\tau \tag{1}$$

gdje je n iz **Z**, a τ iz **C** - na intervalu OT_o pravca L leži prema LEMI samo konačan broj perioda od f. Dakle na OT_o postoji najmanji po modulu period od f. Označimo taj period sa τ i pokažimo da je period od f na L oblika (1) - ako pretpostavimo suprotno tada na L postoji period T koji leži među točkama $n\tau$ i $(n+1)\tau$ i može se prikazati u obliku $T=(n+\theta)\tau$, $0<\tau<1$ pa je prema TM 1 $\mathcal{T}=\theta\tau$ period na intervalu $O\tau$ što je kontradikcija pa vrijedi (1). Pretpostavimo da uz period (1) funkcija f ima još neke periode koji ne leže na L. Po LEMI postoji najveći (otvoreni) krug sa centrom u z=0 koji ne sadrži te periode. Na obodu tog kruga leži samo konačni broj perioda, pa postoji period najbliži pravcu L idući po obodu kruga u smjeru suprotnom od kazaljke na satu - označimo ga sa τ'. Dokažimo da za proizvoljni period T vrijedi $T=n\tau+n'\tau'$ - ako pretpostavimo suprotno vrijedi

$$T=(n+\theta)\tau+(n'+\theta')\tau' \quad , \quad 0<\theta,\theta'<1 \tag{2}$$

Po TM 1 je $\mathcal{T}=\theta\tau+\theta'\tau'$ period od f i leži u unutrašnjosti paralelograma $0,\tau,\tau',\tau+\tau'$ i to po pretpostavci izvan trokuta $0\tau\tau'$. No točka $\mathcal{T}'=\tau+\tau'-\mathcal{T}$ koja je također period leži unutar toga trokuta što je po istoj pretpostavci proturječje.

Brojeve τ,τ' zovemo osnovnim periodima od f.

Prema TM 2 meromofne funkcije možemo podijeliti u tri klase - neperiodične sa $\tau=\tau'=0$, jednostruko periodične sa $\tau\neq0$, $\tau'=0$ i dvostruko periodične sa $\tau,\tau'\neq0$ - ovakve funkcije zovemo eliptičnim funkcijama.

Neka je τ osnovni period od f. Provucimo kroz točke $n\tau$ paralelne pravce u proizvoljnom smjeru različitom od smjera pravca L koji ove točke definiraju. Ovako se ravnina **C** rastavlja na pruge iste širine koje zovemo prugama periodičnosti.

Neka je G dvostruko povezano područje dobiveno iz **C** izbacivanjem točaka 0 i ∞. Razmotrimo na tom području višeznačnu funkciju

$$z=\frac{\tau}{2\pi i}\mathrm{Ln}\zeta$$

čije se vrijednosti u istoj točki razlikuju za cjelobrojni višekratnik od τ. Kompozicija

$$f\left(\frac{\tau}{2\pi i}\mathrm{Ln}\zeta\right)=\phi(\zeta)$$
je jednoznačna na G i ima polove u točkama što odgovaraju polovima od f. Inverz od $z(\zeta)$ je
$$\zeta=\exp\left(\frac{2\pi iz}{\tau}\right)=\exp(i\omega z)\ ,\ \omega=\frac{2\pi}{\tau}$$
pa funkciju $f(z)$ možemo pisati u obliku $f(z)=\phi(i\omega z)$

TM 3.1

U proizvoljnoj prugi ograničenoj pravcima L',L'' paralelnim sa pravcem perioda L koja ne sadrži singularitete od $f(z)$, ova se funkcija može predstaviti Fourierovim redom
$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\exp(ik\omega z) \qquad (3)$$
DZ Pravce L',L'' iz **C** možemo predstaviti izrazom $z=z_o+t\tau$, $z_o\in L'$ tj. L'', $t\in\mathbf{R}$, pa preslikavanjem $\zeta:\mathbf{C}\to G$ prelaze u kružnice
$$\zeta=\exp(iz_o\omega)\exp(2\pi it)$$
U prstenu među tim kružnicama funkcija $\phi(\zeta)$ je analitička, pa se može predstaviti Laurentovim redom
$$\phi(\zeta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\zeta^k$$
Supstitucijom $\zeta=\exp(i\omega z)$ dobivamo
$$\phi(\exp(i\omega z))=f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\exp(ik\omega z)$$
Iz TM 3 neposredno slijedi da se cijela periodična funkcija $f(z)$ može predstaviti Fourierovim redom koji konvergira za sve z

TM 4.1

Ako cijela periodična funkcija $f(z)$ teži konačnom ili beskonačnom limesu kad z teži prema krajevima pruge periodičnosti, tada je ta funkcija trigonometrijski polinom

DZ Prema teoremu o esencijalnim singularitetima funkcija $f(z)$ ima u beskonačno dalekim točkama pruge najviše polove, pa funkcija $\phi(\zeta)=f\left(\frac{\mathrm{Ln}(\zeta)}{i\omega}\right)$ ima u $\zeta=0$ i $\zeta=\infty$ također najviše polove. Uspoređivanjem Laurentovih razvoja od ϕ oko ovih točaka dobivamo
$$\phi(\zeta)=\sum_{k=-m}^{\infty} c_k\zeta^k=\sum_{k=-\infty}^{n} d_k\zeta^k=\sum_{k=-m}^{n} c_k\zeta^k$$
odakle izlazi tvrdnja teorema
$$f(z)=\phi(\exp(i\omega z))=\sum_{k=-m}^{n} c_k\exp(ik\omega z)$$

2. Eliptične funkcije

Razmotrimo sada svojstva eliptičnih funkcija. Neka je f meromorfna sa osnovnim periodima τ i τ'. Dvije točke z_1 i z_2 koje se međusobno razlikuju do na neki period $z_1-z_2=T=n\tau+n'\tau'$ zovemo kongruentnim i pišemo $z_1=z_2(\mathrm{mod}\ \tau,\tau')$. Skupove M_1 i M_2 koji se sastoji od svih točaka kongruentnih točkama iz M_1 za fiksni T zovemo također kongruentnim.

Kvocijent $\frac{\tau'}{\tau}$ ne može biti realan jer bi tada τ' ležao na istom pravcu periodičnosti kao i τ, što je prema dokazu TM 2 nemoguće. Tako točke $0,\tau,\tau',\tau+\tau'$ definiraju nedegenerirani paralelogram. Taj paralelogram i sve paralelograme njemu kongruentne zovemo parale-logramima periodičnosti. Pretpostavimo da se vrhovi $0,\tau,\tau+\tau',\tau'$ nalaze u poretku pozitivne orijentacije granice paralelograma - za to je dovoljan uvjet
$$\mathrm{Im}\left(\frac{\tau'}{\tau}\right)>0$$
Pretpostavimo također da paralelogram periodičnosti sadrži stranice 0τ i $0\tau'$ bez točaka τ i τ', a ne sadrži ostali dio svoje granice, tako da unutar tog paralelograma ne postoje dvije kongruentne točke i da za svaku točku z postoji kongruentna točka u svakom paralelogramu.

TM 1.2

Proizvoljna racionalna kombinacija eliptičnih funkcija $f_1,...,f_n$ sa istim periodima τ,τ' je isto eliptična funkcija sa periodima τ,τ'

DZ Racionalna kombinacija periodičnih funkcija istih perioda je opet periodična funkcija toga perioda. Uz to racionalna kombinacija meromorfnih funkcija je meromorfna funkcija.

TM 2.2

Ako je dvostruko-periodična funkcija cijela tada je konstantna

DZ Cijela funkcija je ograničena na paralelogramu periodičnosti, pa je ograničena na cijelom **C**. Prema teoremu Liouvillea (v. npr. [LŠ] TM2 str.60) takva funkcija je konstantna. U paralelogramu periodičnosti funkcija f ima konačni broj polova. Taj broj, pri čemu se svaki pol pribraja onoliko puta kolika mu je kratnost, zovemo redom eliptične funkcije.

TM 3.2 (Liouville)

Suma reziduuma eliptične funkcije f u svim polovima koje sadrži paralelogram periodičnosti jednaka je nuli

DZ Dovoljno je pokazati da je integral po proizvoljnoj zatvorenoj krivulji koja obuhvaća sve polove iz paralelograma periodičnosti i samo njih, jednak nuli. Ako na stranicama paralelograma periodičnosti nema polova, uzmimo te stranice kao krivulju integracije C. U suprotnom za C uzmemo krivulju koja nastaje translacijom stranica paralelograma za neki z_o.

Ako sa 1,2,3,4 označimo stranice paralelograma periodičnosti slijedom pozitivne orijentacije, vrijedi

$$\int_C f = \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4$$

Suma prvog i trećeg integrala je nula jer se integrira po istim vrijednostima od f samo u suprotnom smijeru, a isto vrijedi i za sumu drugog i četvrtog

TM 4.2

Eliptična funkcija prima u paralelogramu perioda svaku kompleksnu vrijednost a isti broj puta, pri čemu se svaka točka pribraja onoliko puta kolika joj je kratnost, i taj broj je jednak redu eliptičke funkcije

DZ Za vrijednost $f(z)=\infty$ tvrdnja se poklapa sa definicijom reda eliptične funkcije. Za $a\neq\infty$ prema principu argumenta vrijedi

$$N(f)-P(f)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)-a}dz$$

gdje je N(f) broj točaka z gdje je f(z)=a, a P(f) broj polova. Uzmimo da je Γ ista kao C iz prethodnog TM, s tim da ne prolazi točkama f(z)=a. Funkcija $\frac{f'(z)}{f(z)-a}$ je eliptična jer je derivacija eliptične funkcije opet eliptična funkcija i zbog TM 1, pa je po TM 3

$N(f)-P(f)=0$

TM 5.2

Suma svih točaka z iz paralelograma periodičnosti u kojima f(z) prima neku fiksnu vrijednost a, kongruentna je sumi svih polova iz paralelograma periodičnosti

DZ Za $a\neq\infty$ vrijedi

$$\sum_j n_j z_j - \sum_k m_k p_k = \frac{1}{2i\pi}\int_\Gamma z\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz \tag{4}$$

gdje su z_j točke u kojima je $f(z_j)=a$, n_j kratnost tih točaka, p_k polovi, m_k kratnost tih polova, Γ ista kao C iz TM 3. Ako su 1,2,3,4 stranice paralelograma kao u dokazu TM 3

$$\int_\Gamma z\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = \int_1 + \int_2 + \int_3 + \int_4$$

Neka su z i ζ varijable na stranicama 1 i 3 - tada je $\zeta=z+\tau$ i vrijedi

$$\frac{1}{2i\pi}\int_1 z\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz + \frac{1}{2i\pi}\int_3 \zeta\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)-a}d\zeta = \frac{1}{2i\pi}\int_1 (z-\zeta)\frac{f'(z)}{f(z)-a}dz = -\frac{\tau}{2\pi i}(\mathrm{Ln}[f(z_o+\tau')-a]-\mathrm{Ln}[f(z_o)-a])=n\tau$$

$n\in\mathbf{Z}$, zbog $(\mathrm{Ln}[f(z)])'=\frac{f'(z)}{f(z)}$

Analogno je

$$\frac{1}{2i\pi}\int_2 + \frac{1}{2i\pi}\int_4 = n'\tau',\ n'\in\mathbf{Z}$$

Dakle integral (4) ima vrijednost $T=n\tau+n'\tau'$

TM 6.2

Za bilo koje dvije eliptične funkcije f i g istih perioda τ i τ' vrijedi algebarski izraz

$P[f(z),g(z)]=0$

gdje je P(Z,W) polinom u Z i W s konstantnim koeficijentima

DZ Označimo sa $a_1,...,a_m$ točke u **C** u kojima jedna od funkcija f i g ili obje istovremeno imaju polove. Neka je p_i veći red pola a_i za f, g i $p=p_1+...+p_m$.

Neka je Q(Z,W) polinom stupnja n u svojim argumentima Z i W. Ako stavimo Z=f(z) i W=g(z), tada prema TM 1 dobivamo neku eliptičku funkciju F(z) sa periodima τ i τ'. Dokažimo da možemo naći Q takav da je F konstantna. F može imati polove samo u točkama kongruentnim sa a_k i da bi bila konstantna, dovoljno je da su joj, prema TM 2, glavni dijelovi Laurentovih razvoja oko svakog pola jednaki nuli. Točka a_k je za funkciju F(z) najviše pol reda np_k , pa je okolini a_i s jedne strane

$$F(z)=\sum_{k=-np_i}^{\infty} c_k(z-a_i)^k$$

dok je sa druge

$$F(z)=Q(f(z),g(z))=\sum_{\alpha=0}^{\infty}\sum_{\beta=0}^{\infty} Q_{\alpha\beta}\Big(\sum_{k=-p}^{\infty} b_k(z-a_i)^k\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{l=-p_i}^{\infty} d_k(z-a_i)^l\Big)^{\beta}$$

Uvjet da je glavni dio Laurentovog reda za F oko a_i jednak nuli sad se svodi na najviše np_i linearnih homogenih jednadžbi za $Q_{\alpha\beta}$, pa za sve i dobivamo ukupno najviše np jednadžbi. Polinom Q ima ukupno $\frac{n(n+3)}{2}$ koeficijenata, pa za n+3>p imamo više koeficijenata nego jednadžbi. Sada ovaj sistem jednadžbi ima bar jedno netrivijalno rješenje i tako nalazimo traženi Q. Pošto je Q[f(z),g(z)]=const=C, polinom Q–C zadovoljava uvjet TM. Odavde neposredno slijedi da svaka eliptična funkcija zadovoljava diferencijalnu jednadžbu P[f(z),f'(z)]=0 gdje je P polinom

Razmotrimo eliptične funkcije drugog reda koje imaju dva jednostruka pola u paralelogramu periodičnosti, a_1 i a_2 . Translatirajmo **C** tako da bude $a_1+a_2=0$. Uzmimo za paralelogram periodičnosti onaj koji ima centar u z=0. Točke a_1 i a_2 ne mogu ležati na granici paralelograma jer bi tada ležale na suprotnim stranicama, pa obje ne bi mogle biti elementi tog paralelograma. Prema TM 4 i TM 5 funkcija f prima istu vrijednost u točkama z_1 i z_2 za koje je $z_1+z_2=0 (\mathrm{mod}\ \tau,\tau')$. Pošto suma točaka iz paralelograma ne može biti kongruentna nuli i različita od nule vrijedi $z_1+z_2=0$ tj. f(z) je parna funkcija. Odavde slijedi da je f'(z) neparna jer je $f'(-z)=-(f(-z))'=-f(z)$. U točkama a_1,a_2 funkcija f' ima polove drugog reda, pa je ta funkcija eliptična četvrtog reda. ^etiri nultočke ove funkcije u paralelogramu periodičnosti su 0, $\frac{\tau}{2}$, τ', $\frac{\tau+\tau'}{2}$ jer je

$$f'\Big(\frac{\tau}{2}\Big)=-f'\Big(-\frac{\tau}{2}\Big)=-f'\Big(-\frac{\tau}{2}+\tau\Big)=-f'\Big(\frac{\tau}{2}\Big) \quad \text{itd.}$$

TM 7.2

Neka je P polinom za koji je

$$P[f(z),f'(z)]=0 \qquad (5)$$

Ako je Z=f(z) i W=f'(z) vrijede slijedeće tvrdnje

(1) Svakoj vrijednosti Z odgovaraju dvije vrijednosti W takve da vrijedi (5)

(2) Te se vrijednosti razlikuju do na predznak

(3) Svakoj vrijednosti W odgovaraju četiri vrijednosti Z da vrijedi (5)

DZ Pošto je f parna drugog reda ona prima istu vrijednost Z u z i –z, a u tim točkama f' ima vrijednosti W i W' koje se razlikuju do na predznak i po pretpostavci skupa sa Z zadovoljavaju (5).

Analogno, pošto je f' četvrtog reda postoje četiri točke u kojima prima istu vrijednost W, pa imamo četiri vrijednosti Z koje zadovoljavaju (5)

Iz (1) i (3) slijedi da se P može napisati u obliku

$$P(Z,W)=A_o(Z)W^2+A_1(Z)W+A_2(Z)$$

gdje su $A_k(z)$ polinomi najviše četvrtog stupnja. Iz (2) zaključujemo da je $A_1=0$, a iz uvjeta da Z i W istovremeno teže u beskonačno - jer se polovi od f i f' podudaraju - zaključujemo da je A_o=const - u protivnom bi iz $W^2=-\frac{A_2}{A_o}$ slijedilo da u točkama z gdje je $A_o(Z)=0$, W teži u beskonačno.

Tako se izraz (5) svodi na

$$W^2=cA_2(Z)$$

A_2 je polinom četvrtog stupnja čije se nule podudaraju sa nulama od W=f'(z) koje smo pronašli, pa vrijedi

$$[f'(z)]^2=c[f(z)-w_1][f(z)-w_2][f(z)-w_3][f(z)-w_4]$$

$w_1=f(0)$, $w_2=f(\frac{\tau}{2})$, $w_3=f(\frac{\tau'}{2})$, $w_4=f(\frac{\tau+\tau'}{2})$

Stavljanjem w=f(z) dobivamo

$$\frac{dw}{dz}=\sqrt{c(w-w_1)...(w-w_4)}$$

Tako funkciju f(z) možemo dobiti kao inverznu funkciju integrala

$$z=\int_{w_o}^{w}\frac{dw}{\sqrt{c(w-w_1)...(w-w_4)}} \qquad (6)$$

Ovaj integral zovemo eliptičnim integralom.

3. Eliptični integrali i Jacobijeve funkcije sn, cn, dn

Općenito, eliptičnim integralom zovemo integral oblika

$$\int R(w,\sqrt{P(w)})dw \qquad (7)$$

gdje je R racionalna funkcija svojih argumenata, a P polinom trećeg ili četvrtog stupnja.
Općenito, integral (7) se ne može izraziti preko elementarnih funkcija. Može se pokazati da se pomoću elementarnih supstitucija i transformacija eliptički integral može svesti na jedan od tri kanonska oblika

$$\int\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} \ , \ \int\sqrt{\frac{1-k^2w^2}{1-w^2}}dw \ , \ \int\frac{dw}{(1+lw^2)\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$$

(1) (2) (3)

gdje su k,l konstante. Ove integrale zovemo eliptičnim integralima u formi Legendrea, reda prvog, drugog i trećeg respektivno. Broj k zovemo modulom integrala.
Supstitucijom $w=\sin\phi'$, dobivamo ove integrale u tzv. trigonometrijskoj formi. Ako im granice integracije idu od 0 do ϕ, te integrale označavamo sa $F(\phi,k)$, $E(\phi,k)$, $\Pi(\phi,k,l)$ respektivno. Argument ϕ zovemo amplitudom eliptičkog integrala. Za slučaj $\phi=\frac{\pi}{2}$ ove integrale zovemo potpunim i uvodimo oznake

$$F(\frac{\pi}{2},k)=K(k)\ ,\ E(\frac{\pi}{2},k)=E(k)$$

Razmotrimo integral (1). Prema teoremu Schwarza-Christofela o komformnom preslikavanju gornje poluravnine iz **C** u mnogokut (v. npr. [LŠ] TM1 str.162), njime definirana funkcija zadaje konformno preslikavanje gornje poluravnine iz **C** u pravokutnik čiji vrhovi odgovaraju točkama ± 1 i $\pm\frac{1}{k}$. Ako uzmemo pravokutnik sa vrhovima 0, K, K+iK', iK' i konformno preslikavanje prvog kvadranta od **C** u taj pravokutnik, takvo da imamo korespodenciju $0\to 0$, $1\to K$, $\frac{1}{k}\to K+iK'$, $0<k<1$, $\infty\to iK'$ (postojanje toga se može konstruirati), to se preslikavanje može po Riemann-Schwarzovom principu simetrije (v. npr. [LŠ] TM1 str.147 ili [KK] TM71 str.255) analitički produžiti preko pozitivnog dijela imaginarne osi, jer su mu vrijednosti na toj osi čisto imaginarne. Tako dobivamo preslikavanje gornje poluravnine u pravokutnik K, −K, K+iK', −K+iK koje se može prikazati izrazom

$$w(z)=C_o\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(z^2-\frac{1}{k^2})}}+C_1$$

gdje je $C_1=0$ jer je $w(0)=0$. Sada je

$$K=C\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$K+iK'=C\int_0^1+C\int_1^{1/k}=K+iC\int_1^{1/k}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}} \qquad (8)$$

Ako je k zadano, a K i K' uzeti tako da je C=1, ovo se preslikavanje svodi na izraz (1). Inverznu funkciju od w, koja preslikava pravokutnik u gornju poluravninu od **C** zovemo eli-ptičnim sinusom i označavamo sa sn(z,k). Pošto su vrijednosti ove funkcje na rubu pravokutnika realne, možemo ju po Riemann-

Schvarzovom principu analitički produžiti na ci-jeli **C** - pravokutnik ±K, −K+iK’, −K−iK’ se preslikava na donju poluravninu i za z iz tog pravokutnika vrijedi

$$\mathrm{sn}(z)=\overline{\mathrm{sn}(\bar{z})} \qquad (9)$$

Dalje se pravokutnik K, 3K, K−iK’, 3K−iK’ preslikava opet na gornju poluravninu i

sn(z)=sn(−z+2K)

Nastavljajući ovu analizu zaključujemo da je sn(z) periodična sa osnovnim periodima 4K i 2iK’, te da u pravokutniku periodičnosti ima dva pola, i to u točkama iK’ i 3iK’ tj. njima kongruentnim. Prema tome, sn je eliptična funkcija. Pošto pri zrcaljenju u odnosu na imaginarnu (realnu) os, realni (imaginarni) dio funkcije sn mijenja predznak, zaključujemo da je ta funkcija neparna. Na sličan način može se zaključiti da je funkcija f(z)=sn(z–K–iK’) parna.

Iz dvostruke periodičnosti funkcije sn zaključujemo da je njen inverz tj eliptični integral prvog reda beskonačnoznačna funkcija čija je vrijednost određena do na period od f tj.

$$\int_{0L}^{w}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}=\int_{0M}^{w}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}+4nK+2in'K'$$

gdje su L,M putovi koji povezuju točke 0 i w.

Ako uvedemo supstituciju w=sinϕ, integral (1) se svodi na trigonometrijsku formu

$$z=\int_0^{\phi}\frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}$$

Inverz ove funkcije zovemo amplitudom eliptičkog integrala i označavamo sa ϕ=am(z).

Funkciju sn sad možemo izraziti kao sinus amplitude

w=sn(z)=sin(am(z))

Uvode se još i funkcije kosinus i delta amplitude koje označavamo sa cn i dn

$$\cos(\mathrm{am}(z))=\sqrt{1-w^2}=\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 z}=\mathrm{cn}(z)$$

$$\Delta(\mathrm{am}(z))=\sqrt{1-k^2w^2}=\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 z}=\mathrm{dn}(z) \qquad (10)$$

Za slučaj k=0 dobivamo z=arcsin(w), pa je sn(z,0)=$\arcsin^{-1}$(z)=sin(z), i slično cn(z,0)=cos(z), dn(z,0)=1. Može se pokazati da su cn i dn također eliptične funkcije sa periodima 4K, 2K+2iK’ odnosno 2K, 4iK’. Funkcije sn, cn i dn zovemo Jacobijevim funkcijama.

Nađimo derivacije ovih funkcija. Iz izraza (1) za eliptični integral prvog reda dobivamo

$$\frac{dw}{dz}=\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}$$

pa stavljanjem w=sn(z) dobivamo

sn’(z)=cn(z)dn(z)

Deriviranjem izraza $\mathrm{sn}^2(z)+\mathrm{cn}^2(z)=1$, $k^2\mathrm{sn}^2(z)+\mathrm{dn}^2(z)=1$ dobivamo

$$\mathrm{cn}'(z)=-\mathrm{sn}(z)\mathrm{dn}(z)\ ,\ \mathrm{dn}'(z)=-k^2\mathrm{sn}(z)\mathrm{dn}(z) \qquad (11)$$

Izrazimo funkcije dn i sn u prvoj formuli preko cn i stavimo w=cn(z). Tada je

$$\frac{dw}{dz}=-\sqrt{(1-w^2)(k'^2+k^2w^2)}$$

Analogno, iz druge formule stavljanjem w=dn(z) dobivamo

$$\frac{dw}{dz}=-\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)}$$

gdje je $k'^2=1-k^2$. Pošto je sn(0)=0, iz (10) dobivamo cn(0)=dn(0)=1, pa se inverzi od cn i dn mogu izraziti (respektivno) pomoću integrala

$$z=\int_1^{w}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(k'^2-k^2w^2)}}$$

$$z=\int_1^{w}\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(w^2-k'^2)}}$$

Izvedimo izraz za eliptični sinus zbroja dva argumenta. Razmotrimo najprije diferencijalnu jednadžbu oblika

$$\frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}+\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}}=0 \qquad (12)$$

Jedan integral ove jednadžbe je

$$\int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}+\int_0^\omega \frac{dw}{\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2w^2)}}=C \qquad (13)$$

Drugi integral možemo dobiti zamjenom jednadžbe (12) sistemom

$$\frac{dw}{du}=\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)} \quad , \quad \frac{d\omega}{du}=\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)} \qquad (14)$$

gdje je u neka pomoćna varijabla. Deriviranjem ovih jednadžbi po u dobivamo

$w''=w(2k^2w^2-1-k^2)$, $\omega''=\omega(2k^2\omega^2-1-k^2)$

odakle je

$\omega w''-w\omega''=(\omega w'-w\omega')'=2k^2w\omega(w^2-\omega^2)$

Isto tako, vrijedi

$\omega^2w'^2-w^2\omega'^2=(\omega^2-w^2)(1-k^2w^2\omega^2)$

Dijeljenjem ovih jednadžbi dobivamo

$$\frac{(\omega w'-w\omega')'}{\omega w'-w\omega'}=-2k^2w\omega\frac{\omega w'+w\omega'}{1-k^2\omega^2w^2}$$

Lako je provjeriti da ovaj izraz možemo napisati u obliku

$(\ln[\omega w'-w\omega'])'=(\ln[1-k^2w^2\omega^2])'$

odakle je

$\omega w'-w\omega'=C(1-k^2w^2\omega^2)$

Sada jednadžbe (14) daju

$$\frac{w\sqrt{(1-\omega^2)(1-k^2\omega^2)}+\omega\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}{1-k^2w^2\omega^2}=C_1 \qquad (15)$$

ako za prvi integral u (13) stavimo oznaku z, a za drugi ζ, vrijedi $w=sn(z)$, $\omega=sn(\zeta)$, pa se ovom supstitucijom izraz (15) svodi na

$$\frac{sn(z)cn(\zeta)dn(\zeta)+sn(\zeta)cn(z)dn(z)}{1-k^2sn^2(z)sn^2(\zeta)}=C_1 \qquad (16)$$

Prema teoremu o jedinstvenosti rješenja diferencijalne jednadžbe jedan integral koji smo našli je funkcija drugog, pa možemo pisati

$C_1=\phi(C)=\phi(z+\zeta)$

Za $\zeta=0$ iz (16) dobivamo $\phi(z)=sn(z)$, pa dobivamo izraz za eliptični sinus zbroja argume-nata

$$sn(z+\zeta)=\frac{sn(z)cn(\zeta)dn(\zeta)+sn(\zeta)cn(z)dn(z)}{1-k^2sn^2(z)sn^2(\zeta)} \qquad (17)$$

Adicione formule za Jacobijeve funkcije cn i dn dobivaju se iz (17) korištenjem (10), i one su oblika

$$cn(z+\zeta)=\frac{cn(z)cn(\zeta)-sn(z)sn(\zeta)dn(z)dn(\zeta)}{1-k^2sn^2(z)sn^2(\zeta)}$$

$$dn(z+\zeta)=\frac{dn(z)dn(\zeta)-k^2sn(z)sn(\zeta)cn(z)cn(\zeta)}{1-k^2sn(z)sn(\zeta)}$$

4. Weierstrassova P-funkcija

LEMA

Za kompleksne brojeve τ,τ' za koje je $\mathrm{Im}(\frac{\tau'}{\tau})>0$ red

$$\sum_{n,n'=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(n\tau+n'\tau')^3} \qquad (18)$$

gdje crtica znači da u sumi izostavljamo slučaj $n=n'=0$, apsolutno konvergira.

DZ Točke $T=n\tau+n'\tau'$ leže na vrhovima mreže paralelograma. Uzmimo iz te mreže para-lelogram Π_1 određen sa $\pm(\tau+\tau')$, $\pm(\tau-\tau')$ i neka je l najmanja udaljenost točke z=0 od točaka koje leže na tom paralelogramu. Sad je za svaku od točaka oblika T iz Π_1

$$\left|\frac{1}{T^3}\right|\le\frac{1}{l^3}$$

pa za sumu po tim točkama, kojih ima 8, vrijedi

$$\sum_{\Pi_1}\frac{1}{|T|^2}\leq\frac{8}{l^3}$$

Analogno, na paralelogramu Π_2 određenom sa $\pm2(\tau+\tau')$, $\pm2(\tau-\tau')$ je udaljenost točaka T od z=0 manja od 2l, pa pošto na tom paralelogramu imamo 16 točaka, vrijedi

$$\sum_{\Pi_2}\frac{1}{|T|^3}\leq\frac{8}{2^2 l^3}$$

Općenito za paralelogram Π_n na kome leži 8n točaka čija udaljenost od z=0 nije veća od nl vrijedi

$$\sum_{\Pi_n}\frac{1}{|T|^3}\leq\frac{8}{n^2 l^3}$$

Tako se red $\sum_T\frac{1}{|T|^3}$ može ocijeniti redom $\frac{8}{l^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, pa (18) konvergira apsolutno

Iz LEME slijedi da red

$$f(z)=\sum_{n,n'=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(z-n\tau-n'\tau')^3}=\sum\frac{1}{(z-T)^3}$$

konvergira apsolutno i uniformno na proizvoljnom krugu $|z|\leq R$ iz kojeg smo izbacili točke T jer za članove u redu za koje je $|T|>2R$ vrijedi

$$\left|\frac{1}{(z-T)^3}\right|\leq\frac{1}{|T|^3(1-\left|\frac{z}{T}\right|)^3}\leq\frac{8}{|T|^3}$$

zbog $|\frac{z}{T}|<\frac{1}{2}$ i $|1-\frac{z}{T}|\geq1-|\frac{z}{T}|$.

Ako predstavimo f(z) za $|z|<R$ u obliku

$$f(z)=\sum_{|T|\leq R}\frac{1}{(z-T)^3}+\sum_{|T|>R}\frac{1}{(z-T)^3}$$

vidimo da je prva suma racionalna funkcija koja ima u svakoj točki T pol trećeg reda, dok je druga suma analitička funkcija. Prema tome, f je meromorfna. Uz to, f je očito periodična sa periodima τ i τ'. Ako je T proizvoljni period od f tada je T+T=T' pol od f. Prema tome je T=T−T' cjelobrojna kombinacija τ i τ', pa su τ, τ' osnovni periodi od f.

Tako zaključujemo da je f eliptička funkcija trećeg reda. Osim toga, ona je neparna jer je

$$f(-z)=\sum\frac{1}{(-z-T)^3}=-\sum\frac{1}{(z-(-T))^3}=-f(z)$$

Integracijom funkcije f duž krivulje koja spaja neke z_o i z i ne sadrži njene polove dobiva-mo funkciju

$$\varphi(z)=C-\frac{1}{2}\sum(\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{(z_o-T)^2})$$

Odvajanjem člana sa T=0 u gornjoj sumi dobivamo

$$\varphi(z)+\frac{1}{2z^2}=C+\frac{1}{2z_o}-\sum{}'(\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{(z_o-T)^2})$$

Desna strana ove jednadžbe je regularna u nuli, pa možemo izabrati C tako da bude jednaka nuli. Tako dobivamo

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2}(\frac{1}{z^2}+\sum{}'(\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2})=-\frac{1}{2}P(z)$$

Meromorfnu funkciju P(z) zovemo Weierstrassovom P-funkcijom . Red u ovom izrazu konver-gira apsolutno, jer je

$$\left|\frac{1}{(z-T)^2}-\frac{1}{T^2}\right|=\frac{|z||2T-z|}{|T|^2|T-z|^2}\leq\frac{|z|}{|T|^3}(\frac{|T|^2}{|T-z|^2}+\frac{|T|}{|T-z|})\leq C\frac{|z|}{|T|^3}$$

zbog $|2T-z| \leq |T| + |T-z|$ i jer postoji $A \in \mathbf{R}$ da je $\left|\frac{T}{T-z}\right| < A$ za z fiksan - naime zbog $z \neq T$ je za $b=T-z$ $|b|>0$, pa $\exists B \in \mathbf{R}$ da je $\frac{1}{|b|} < B$, tako da možemo uzeti $A=1+B|z|$.

Dakle, P je parna i vrijedi

$$P'(z) = -2\sum \frac{1}{(z-T)^3} = -2f(z)$$

Pošto je f periodična sa periodima τ, τ' vrijedi

$P'(z+\tau) - P'(z) = 0$, $P'(z+\tau') - P'(z) = 0$

Integracijom ovih jednadžbi dobivamo

$P(z+\tau) - P(z) = C$, $P(z+\tau') - P(z) = C'$

Za $z = -\frac{\tau}{2}$ je $P(\frac{\tau}{2}) = P(-\frac{\tau}{2}) + C$, pa zbog parnosti zaključujemo da je P periodična sa peri-odima τ i τ', što znači eliptična.

Funkcija $P'(z)$ je eliptična funkcija trećeg reda, pa ima tri nultočke $\frac{\tau}{2}, \frac{\tau'}{2}, \frac{\tau+\tau'}{2}$ koje nalazimo koristeći njenu neparnost. Ove točke imaju kratnost 2 jer je u okolini tih točaka

$P(z) - P(z_o) = (z-z_o)^2(a_2 + a_3 z + \dots)$

i jer je P drugog reda. Vrijednosti različite od 0 i ∞ funkcija P prima u dvije različite točke jer bi u suprotnom P' imala još nultočki na paralelogramu perioda.

Nađimo diferencijalnu jednadžbu, koja prema TM 6.2 zadovoljava P . Razvijmo P u Laurentov red oko z=0. Za $T \neq 0$ vrijedi

$$\frac{1}{(z-T)^2} - \frac{1}{T^2} = \frac{1}{T^2}\left(\left(1-\frac{z}{T}\right)^{-2} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{T^{n+2}} z^n$$

Zbog parnosti, u izrazu za P se pojavljuju samo parne potencije od z , pa je

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + 3z^2 \sum{}' \frac{1}{T^4} + 5z^4 \sum{}' \frac{1}{T^6} + \dots$$

Uzmimo konstante g_2, g_3 tako da bude

$$P(z) = \frac{1}{z^2} + g_2\frac{z^2}{20} + g_3\frac{z^4}{28} + \dots \qquad (19)$$

Sada je

$$P'(z) = -\frac{2}{z^3} + g_2\frac{z}{10} + g_3\frac{z^3}{7} + \dots \qquad (20)$$

Nađimo racionalnu kombinaciju funkcija P i P' koja nema polova na paralelogramu perio-dičnosti. Iz (19) i (20) dobivamo da u nekoj okolini nule vrijedi

$(P'(z))^2 - 4(P(z))^3 + g_2 P(z) = -g_3 + c_2 z^2 + c_3 z^4 + \dots$

Lijeva strana ovog izraza može na paralelogramu periodičnosti imati pol samo u z=0. Me- žutim desna strana pokazuje da z=0 nije pol, pa prema tome eliptična funkcija slijeva nema polova na paralelogramu periodičnosti. Iz TM 2.2 slijedi da je ova funkcija konstanta, a ta konstanta je $-g_3$, pa nalazimo da je tražena diferencijalna jednadžba oblika

$$(P'(z))^2 = 4(P(z))^3 - g_2 P(z) - g_3 \qquad (21)$$

Ako stavimo $P(z)=w$ iz (21) dobivamo

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}$$

$$z - z_0 = \int_{w_0}^{w} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}$$

Pošto je $w_o = P(z_o)$ i $P(0) = \infty$, zaključujemo da je $P(z)$ inverzna funkcija integrala

$$z = \int_{-\infty}^{w} \frac{dw}{\sqrt{4w^3 - g_2 w - g_3}}$$

koji zovemo eliptičnim integralom u formi Weierstrassa.

5. Weierstrassove zeta i sigma funkcije

Weierstrassovu zeta funkciju definiramo izrazom

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}-\int_0^z\left(P(z)-\frac{1}{z^2}\right)dz$$

Uvrštavanjem izraza za P(z) dobivamo

$$\zeta(z)=\frac{1}{z}+\sum{}'\left(\frac{1}{z-T}+\frac{1}{T}+\frac{z}{T^2}\right) \qquad (22)$$

Pokažimo da je funkcija ζ neparna. Pošto je $\zeta'(z)=-P(z)$ vrijedi

$(\zeta(z)+\zeta(-z))'=\zeta'(z)-\zeta'(-z)=-P(z)+P(-z)=0$

jer je $\zeta'(z)=-P(z)$ i jer je P parna. Prema tome je $\zeta(z)+\zeta(-z)=C=[\zeta(z)+\zeta(-z)]\big|_{z\to o}=0$

Pri promjeni argumenta za T, vrijednost funkcije ζ se mijenja za neku konstantnu vrijednost jer je $(\zeta(z+T)-\zeta(z))'=-P(z+T)+P(z)$, pa stavimo

$$\zeta(z+\tau)-\zeta(z)=\delta \qquad (23)$$
$$\zeta(z+\tau')-\zeta(z)=\delta'$$

Integrirajmo funkciju $\zeta(z)$ po stranicama paralelograma $\pm\frac{\tau\pm\tau'}{2}$. Unutar tog paralelograma ζ ima samo jedan pol i to u z=0 sa reziduumom 1, pa je vrijednost tog integrala jednaka $2\pi i$. S druge strane, ako stranice paralelograma označimo sa 1,2,3,4 u slijedu pozitivne orijentacije vrijedi

$$\int_1\zeta(z)dz=-\int_3\zeta(z+\tau)dz=-\int_3\zeta(z)dz+\delta\tau'$$

$$\int_2\zeta(z)dz=-\int_4\zeta(z+\tau')dz=-\int_4\zeta(z)dz-\delta'\tau$$

Prema tome je integral od ζ po ovom paralelogramu jednak $\delta\tau'-\delta'\tau$, pa vrijedi

$$\delta\tau'-\delta'\tau=2\pi i \qquad (24)$$

Weierstrassovu sigma funkciju definiramo izrazom

$$\sigma(z)=z\cdot\exp\left(\int_0^z\left(\zeta(z)-\frac{1}{z}\right)dz\right) \qquad (25)$$

Primjetimo da je $\sigma'(z)=\zeta(z)$. Uvrštavanjem izraza (22) za ζ dobivamo

$$\sigma(z)=z\cdot\prod{}'\left(1-\frac{z}{T}\right)\exp\left(\frac{z}{T}-\frac{z^2}{2T^2}\right) \qquad (26)$$

Pošto ovaj beskonačni produkt zbog (23) konvergira u točkama $z\neq T$, a u točkama z=T ima vrijednost 0, zaključujemo da je $\sigma(z)$ cijela funkcija. Odmah se vidi da su nultočke z=T jednostruke. Iz neparnosti funkcije ζ izlazi da je σ isto neparna. Pošto je $(\ln[\sigma(z)])'=\zeta(z)$ prema izrazima (23) vrijedi

$(\ln[\sigma(z+\tau)])'-(\ln[\sigma(z)])'=\delta$

Integracijom i eksponenciranjem tog izraza dobivamo

$\sigma(z+\tau)=\sigma(z)\exp(\delta z+\gamma)$

Za $z=-\frac{\tau}{2}$ zbog neparnosti funkcije σ dobivamo $\exp(-\delta\frac{\tau}{2}+\gamma)=-1$, pa je $\exp(\gamma)=-\exp(\frac{\delta\tau}{2})$, odnosno

$$\sigma(z+\tau)=-\sigma(z)\exp\left[\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)\right] \qquad (27)$$

Definirajmo još tri σ funkcije

$$\sigma_1(z)=-\exp\left(\frac{\delta z}{2}\right)\frac{\sigma(z-\frac{\tau}{2})}{\sigma(\frac{\tau}{2})}$$

$$\sigma_2(z)=-\exp\left(\frac{\delta' z}{2}\right)\frac{\sigma(z-\frac{\tau'}{2})}{\sigma(\frac{\tau'}{2})}$$

$$\sigma_3(z)=-\exp\left(\frac{\delta''z}{2}\right)\frac{\sigma\left(z-\frac{\tau''}{2}\right)}{\sigma(\tau'')}$$

gdje je $\tau''=\tau+\tau'$, a δ'' konstanta što odgovara tom periodu prema (23)

TM 1.5

Svaku eliptičnu funkciju f, n-tog reda sa nulama $a_1,...,a_n$ i polovima $b_1,...,b_n$ - svaka se točka ovdje pojavljuje onoliko puta kolika joj je kratnost - u paralelogramu periodičnosti, možemo izraziti pomoću σ funkcije u obliku

$$f(z)=C\frac{\sigma(z-A)\sigma(z-a_2)...\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)...\sigma(z-b_n)} \qquad (28)$$

gdje je C neka konstanta i $A=b_1+...+b_n-a_2-...-a_n$

DZ Neka je $g(z)=\frac{\sigma(z-A)\sigma(z-a_2)...\sigma(z-a_n)}{\sigma(z-b_1)\sigma(z-b_2)...\sigma(z-b_n)}$. Prema (27) vrijedi

$$g(z+\tau)=\exp[\delta(b_1+...+b_n-A-a_2-...-a_n)]g(z)=g(z)$$

Analogno je $g(z+\tau')=g(z)$, pa je g(z) eliptična. Dokažimo da kvocijent $\frac{f(z)}{g(z)}$ nema polova na paralelogramu periodičnosti. U okolini pola b_i vrijedi

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\left(\frac{c_{-k_i}}{(z-b_i)^{k_i}}+\frac{c_{-k_i+1}}{(z-b_i)^{k_i-1}}+...\right)(\sigma(z-b_i))^{k_i}A(z)$$

gdje je k_i kratnost pola b_i, a A(z) neka analitička funkcija, pa pošto $\sigma(z-b_i)$ ima u b_i je-dnostruku nultočku, $\frac{f}{g}$ je analitička u b_i. Analogno, razvojem $f(z)=(z-a_i)^kA(z)$ u okolini nultočke a_i zaključujemo da ovaj kvocijent nema polova ni u točkama a_i. Prema TM 5.2 vrijedi $A=a_1(\text{mod } \tau,\tau')$, pa pola nema niti tu. U ostalim točkama $\frac{f}{g}$ je regularna, pa je prema TM 2.2 konstanta.

6. Jacobijeve theta funkcije

Funkcije koje smo gore razmatrali mogu se predstaviti redovima koji konvergiraju jako spo-ro. Zato je korisno uvesti Jacobijeve theta funkcije koje se predstavljaju brzo konvergentnim redovima, a preko kojih se mogu izraziti sve ostale eliptične funkcije. Uzmimo funkciju

$$\phi(z)=\exp\left[\frac{1}{2\tau}(\delta z^2-2\pi iz)\right]$$

Sad je $\phi(z+\tau)=-\phi(z)\exp\left[\delta\left(z+\frac{\tau}{2}\right)\right]$

Stavimo $\psi(z)=\frac{\sigma(z)}{\phi(z)}$. Ova je funkcija očito cijela, jer je σ cijela, a ϕ nema nultočki. Zbog (27) vrijedi

$$\psi(z+\tau)=\psi(z) \qquad (29)$$

Dalje je

$$\psi(z+\tau')=-\psi(z)\exp\left[\frac{\delta'\tau-\tau\delta'}{\tau}\left(z+\frac{\tau'}{2}\right)\right]\exp\left(i\pi\frac{\tau'}{\tau}\right)$$

Korištenjem (24) ovaj se izraz svodi na

$$\psi(z+\tau')=-\psi(z)\exp\left(-\frac{2\pi iz}{\tau}\right) \qquad (30)$$

Prema (29) ψ je periodična, pa se prema TM 3.1 može razviti u Fourierov red

$$\psi(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\exp(ik\omega z) \quad , \quad \omega=\frac{2\pi}{\tau} \qquad (31)$$

koji konvergira za sve $z\in\mathbf{C}$, jer je ψ cijela. Dalje je

$$\psi(z+\tau')=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\exp(ik\omega\tau')\exp(ik\omega z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kq^{2k}\exp(ik\omega z)$$

za $q=\exp(\frac{i\omega\tau'}{2})=\exp(i\pi\frac{\tau'}{\tau})$

Odavde i iz (30) slijedi

$$\psi(z)=-\exp(i\omega z)\psi(z+\tau')=-\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k q^{2k}\exp[i(k+1)\omega z]$$

Usporedbom sa (31) dobivamo

$c_{k+1}=-c_k q^{2k}$, $k\in\mathbf{Z}$

Stavimo $c_o=C\sqrt[4]{q}$. Indukcijom dokazujemo izraz

$c_k=(-1)^k C q^{(k-\frac{1}{2})^2}$, $k\in\mathbf{Z}$

Uvrštavanje u (31) daje

$$\psi(z)=C\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{(k-\frac{1}{2})^2}\exp(ik\omega z)$$

Jacobijevu theta funkciju θ_1 definiramo izrazom

$$\theta_1(z)=\frac{i}{C}\exp(-i\pi z)\psi(\tau z) \qquad (32)$$

pa ju možemo pisati u obliku

$$\theta_1(z)=i\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{(k-\frac{1}{2})^2}\exp[i\pi(2k-1)z]=2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} q^{(k-\frac{1}{2})^2}\sin[\pi(2k-1)z] \qquad (33)$$

odakle vidimo da je θ_1 neparna funkcija.

Pošto je $\sigma(z)=\psi(z)\phi(z)$ Weierstrassovu σ funkciju možemo izraziti pomoću funkcije θ_1

$$\sigma(z)=-iC\cdot\exp(\frac{\delta z^2}{2\tau})\theta_1(\frac{z}{\tau})$$

Da bismo odredili konstantu C Nađimo derivaciju gornjeg izraza u točki z=0. Iz izraza za σ u obliku beskonačnog produkta (26) dobivamo $\sigma'(0)=1$, dok je derivacija desne strane jednaka $-iC\frac{\theta_1'(0)}{\tau}$, pa je

$C=\frac{i\tau}{\theta_1'(0)}$ i

$$\sigma(z)=\tau\cdot\exp(\frac{\delta z^2}{2\tau})\frac{\theta_1(\frac{z}{\tau})}{\theta_1'(0)} \qquad (34)$$

Odavde zaključujemo da je θ_1 cijela neparna funkcija. Pošto je ψ periodična sa periodom τ, iz (32) zaključujemo da je θ_1 periodična sa periodom 2. Nultočke od σ su oblika $T=n\tau+n'\tau'$, pa θ_1 ima nultočke u $z=n+n'\frac{\tau'}{\tau}$.

Ranije smo pretpostavili $\mathrm{Im}(\frac{\tau'}{\tau})>0$, pa je prema definiciji od q

$$|q|=\exp[-\pi\cdot\mathrm{Im}(\frac{\tau'}{\tau})]<1$$

Odavde zaključujemo da red u (33) vrlo brzo konvergira zbog članova oblika q^{k^2}.

Definirajmo još tri θ funkcije

$$\theta_2(z)=\theta_1(z+\frac{1}{2})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{(k-\frac{1}{2})^2}\exp[i\pi(2k-1)z] \qquad (35)$$

$$\theta_3(z)=\sqrt[4]{q}\exp(i\pi z)\cdot\theta_1(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau'}{\tau})=\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k^2}\exp(2k\pi iz)$$

$$\theta_4(z)=\theta_3(z+\frac{1}{2})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k^2}\exp(2\pi ikz)$$

Sve ove funkcije su očito cijele i parne. θ_2 je perioda 2, a θ_3, θ_4 perioda 1. Preko ovih funkcija možemo izraziti Weierstrassove σ_k funkcije i to po formuli analognoj (34) - s lijeve strane umjesto σ stoji σ_k , a sa desne umjesto θ_1,θ_1' stoje $\theta_{k+1},\theta_{k+1}'$.

Ako stavimo $\kappa=-i\frac{\tau'}{\tau}$ vrijedi $q=\exp(-\pi\kappa)$, pa vidimo da Jacobijeve θ funkcije ovise o samo jednom parametru. Zato ih možemo označavati sa $\theta_j(z,\kappa)$. Deriviranjem redova (33) i (35) po z i κ nalazimo da θ funkcije zadovoljavaju jednadžbu

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=4\pi\frac{\partial\theta}{\partial\kappa}$$

gdje simbol θ označava proizvoljnu funkciju θ_i .

Prema TM 1.5 svaka se eliptična funkcija može izraziti preko σ funkcije prema formuli (28). Pošto se σ funkcija može izraziti preko θ_1, zaključujemo da se svaka eliptična funkcija može izraziti pomoću Jacobijevih θ funkcija.

Uzmimo npr. funkciju sn koja na svom paralelogramu periodičnosti ima, kako smo vidjeli, polove prvog reda u iK', 2K+iK' i jednostruke nultočke u točkama 0, 2K. Uvrštavanjem tih vrijednosti u (28) i formalnim manipulacijama dobivamo

$$\mathrm{sn}(z)=\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_1(\frac{z}{2K})}{\theta_4(\frac{z}{2K})} \qquad (36)$$

gdje je q što se pojavljuje u izrazu za θ_1 tj. θ_4 jednak $\exp(-\pi\frac{K'}{K})$, a ne $\exp(-\pi\frac{K'}{2K})$, kako bi bilo po našoj definiciji.

Analognim postupkom možemo dobiti funkcije cn i dn izražene pomoću Jacobijevih θ funkcija

$$\mathrm{cn}(z)=\sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\theta_2(\frac{z}{2K})}{\theta_4(\frac{z}{2K})} \quad , \quad \mathrm{dn}(z)=\sqrt{k'}\frac{\theta_3(\frac{z}{2K})}{\theta_4(\frac{z}{2K})}$$

Produktne formule za θ funkcije, koje koristimo u dijelu **II**, vjerojatno se mogu izvesti pomoću produktne formule (26) za σ funkciju i veze (34). Mi ih ovdje (kao ni [LŠ]) nećemo izvoditi, već ih samo navodimo

$$\theta_1(z)=2\sqrt[4]{q}\sin(\pi z)\prod_{k=1}^{\infty}(1-2q^{2k}\cos(2\pi z)+q^{4k})(1-q^{2k}) \qquad (37)$$

$$\theta_2(z)=2\sqrt[4]{q}\cos(\pi z)\prod_{k=1}^{\infty}(1+2q^{2k}\cos(2\pi z)+q^{4k})(1-q^{2k})$$

$$\theta_3(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1+2q^{2k-1}\cos(2\pi z)+q^{4k-2})(1-q^{2k})$$

$$\theta_4(z)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-2q^{2k-1}\cos(2\pi z)+q^{4k-2})(1-q^{2k})$$

Napišimo još dvije adicione formule za funkciju sn i tri relacije sa θ funkcijama iz koje se također koriste u izvodima dijela **II**

$$\mathrm{sn}(z)\mathrm{sn}(z-u-v)=\frac{\mathrm{sn}(z-u)\mathrm{sn}(z-v)-\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)}{1-k^2\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(v)\mathrm{sn}(z-u)\mathrm{sn}(z-v)} \qquad (38)$$

$$\frac{\mathrm{sn}(z-u-v)}{\mathrm{sn}(z)}=\frac{\mathrm{sn}(v)\mathrm{sn}(z-v)-\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(z-u)}{\mathrm{sn}(v)\mathrm{sn}(z-u)-\mathrm{sn}(u)\mathrm{sn}(z-v)} \qquad (39)$$

$$\theta_1(u)\theta_4(u)\theta_2(v)\theta_3(v)-\theta_1(v)\theta_4(v)\theta_2(u)\theta_3(u)=\theta_1(u-v)\theta_4(u+v)\theta_2(0)\theta_3(0) \qquad (40)$$

$$\theta_4(u)\theta_4(v)\theta_4(z-u)\theta_4(z-v)-\theta_1(v)\theta_1(v)\theta_1(z-u)\theta_1(z-v)=\theta_4(0)\theta_4(z)\theta_4(u-v)\theta_4(z-u-v) \qquad (41)$$

$$\theta_4(u)\theta_4(v)-\theta_1(u)\theta_1(v)=-\frac{2\sqrt[4]{q}}{\theta_2(0)\cdot\theta_3(0)}\theta_1(\frac{1}{2}(\frac{iK'}{2K}+u-v))\theta_1(\frac{1}{2}(\frac{iK'}{2K}-u+v))\theta_1(\frac{1}{2}(\frac{iK'}{2K}+u+v))\theta_1(\frac{1}{2}(\frac{iK'}{2K}-u-v))$$

(42)