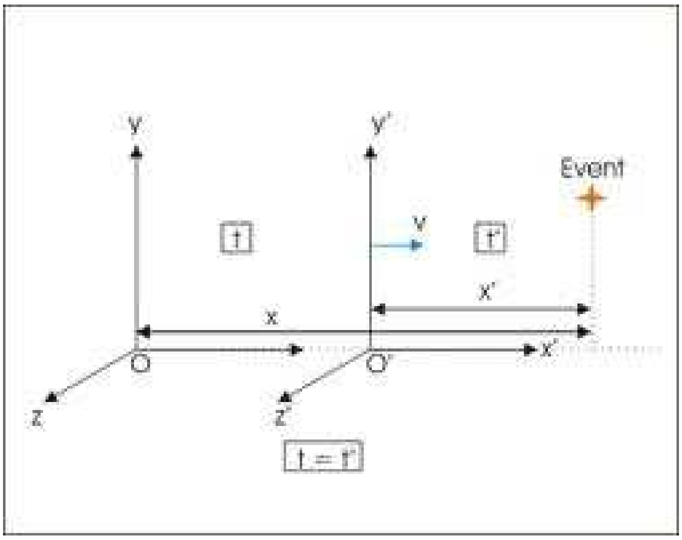
GALILEJEVA INVARIJANTNOST KLASIČNE MEHANIKE

Evo jednostavnog izvoda koji pokazuje da je klasična mehanika (u Newtonovoj formulaciji) invarijantna tj. da se ne mijenja s obzirom na Galilejeve transformacije. Zamislimo da neki fizikalni događaj koji se može opisati klasičnom mehanikom (dakle pomoću Newtonovih zakona) proučavaju dva promatrača - jedan koji miruje u sustavu referencije S i drugi koji miruje u sustavu S' koji se sam giba jednolikom brzinom v u odnosu na S.



Oblik Galilejevih transformacija je kao što znamo, u slučaju da se sustav S' giba duž x osi sustava S i da su oba sustava jednako orijentirana (tj. da im se smjerovi osi poklapaju) slijedeći:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \qquad\qquad (1) \\ z' &= z \end{aligned}$$

pri čemu vrijedi i pretpostavka o "apsolutnom" vremenu - $t' = t$.
Događaj koji se promatra može se, po našoj pretpostavci, iz sustava S opisati Newtonovom jednadžbom gibanja (pretpostavimo radi jednostavnosti da se događaj zbiva u jednoj dimenziji, premda je ekstrapolacija na druge dvije dimenzije trivijalna):

$$m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = F(x,t) \qquad (2)$$

Da bismo dokazali Galilejevu invarijantnost klasične mehanike, dovoljno je pokazati da ova jednadžba u oba sustava ima isti oblik. Pošto se radi o sili koja djeluje u istoj točki prostora i u istom (apsolutnom vremenu), te s obzirom na prvi Newtonov zakon prema kojemu u sustavu S' nema dodatnih (inercijalnih) sila očito je:

$$F'(x',t') = F(x,t) \qquad (3)$$

S druge je strane prema (1):

$$\frac{d^2}{dt'^2}x'(t') = (\text{jer je t' = t}) = \frac{d^2}{dt^2}x'(t) = \frac{d^2}{dt^2}(x(t) - vt) = (\text{prema pravilima za deriviranje}) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$$

Pa je prema (2) i (3):

$m\frac{d^2}{dt'^2}x'(t') = m\frac{d^2}{dt^2}x(t) = F(x,t) = F'(x',t')$

Dakle, Newtonova jednadžba se ne mijenja pri Galilejevim transformacijama, pa kažemo da je klasična mehanika invarijantna na Galilejeve transformacije ili Galilejevu grupu transformacija. Drugim riječima zakoni mehanike isti su u svim sustavima referencije koji su međusobno povezani Galilejevim transformacijama.

Relativistička mehanika nije invarijantna s obzirom na Galilejevu, nego s obzirom na Lorentzovu grupu transformacija. U slučaju koji smo razmatrali prethodno (gibanje sustava duž x osi koje se poklapaju), ove transformacije imaju slijedeći oblik:

$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$
$y' = y$
$z' = z$
$t' = \frac{t-\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

Čitatelj bi za vježbu mogao dokazati da Newtonova jednadžba gibanja nije invarijantna s obzirom na Lorentzove transformacije, tj. da se zakoni klasične mehanike pri relativističkim transformacijama ne ostaju nepromijenjeni.