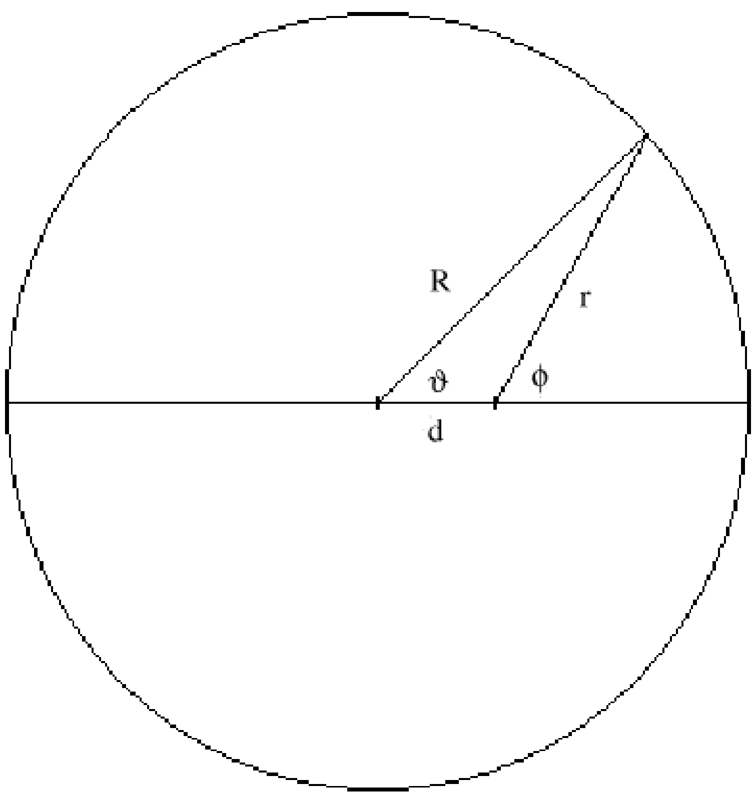
O NEKIM POSLJEDICAMA NEWTONOVOG ZAKONA GRAVITACIJE

Pojavio se u zadnje vrijeme jedan "teoretičar" koji tvrdi da je Zemaljska kugla šuplja i da na njezinoj "unutrašnjij površini žive nekakva čovjekolika(?) bića. Jedan argument protiv ove teorije predstavlja činjenica da u takvoj šupljini u Zemljinoj unutrašnjosti ne bi bilo gravitacije (tj. da bi vladalo bestežinsko stanje), pa bi takav ambijent morao biti vrlo neprikladan za život, a posebno za život nekakvih doseljenika sa "vanjske površine".

Evo dokaza da je gravitacijsko polje u sferičnoj šupljini koja je smještena unutar masivne kugle tako da se središta te kugle i šupljine podudaraju, jednako nuli. Polazimo od Newtonovog zakona gravitacije koji kaže da dva masivna tijela aproksimirana matematičkim točkama djeluju jedno na drugo silom koja je proporcionalna njihovim masama, a obrnuto je proporcionalna kvadratu njihove relativne udaljenosti. Smjer sile odgovara smjeru spojnice tih dvaju tijela, s tim da je sila uvijek privlačna. Iznos te sile možemo napisati u obliku
$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$
gdje je $G = 6.67 * 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$.



Slika 1

Neka je R_1 polumjer šupljine unutar kugle, R_2 polumjer kugle, a ρ gustoća materijala od kojeg je sačinjena kugla ($\rho = \frac{dm}{dV} = const$). Sila kojom "element mase" šuplje kugle $\Delta m = \rho \Delta V$ djeluje na tijelo mase m koje se nalazi u sferičnoj šupljini na udaljenosti d od centra kugle (odnosno šupljine) dana je u skladu s Newtonovim zakonom gravitacije izrazom
$\Delta \vec{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{r}} \frac{\mathrm{Gm}\rho\Delta \mathrm{V}}{\mathrm{r}^2}$
gdje je $\hat{\mathbf{r}}$ jedinični vektor u smjeru spojnice tijela i promatranog "elementa mase", a r njihova udaljenost. Komponenta ove sile koja djeluje na tijelo u smjeru simetrale koja ide duž spojnice središta

kugle i točke u kojoj se tijelo nalazi dana je izrazom
$\Delta F_s = \frac{Gm\rho\Delta V}{r^2}\cos\phi$
što se vidi iz slike 1. Komponenta sile okomita na ovaj smjer zbog simetrije problema očito mora biti jednaka nuli. Iz slike 1 također vidimo da je
$r^2 = R^2 + d^2 - 2Rd\cos\vartheta$
$\cos\phi = \frac{R\cos\vartheta - d}{r}$
Ukupan iznos sile koja djeluje na tijelo u šupljini kugle dan je dakle izrazom
$F_s = \int_V \frac{Gm\rho\cos\phi}{r^2}dV = Gm\rho\int_{R_1}^{R_2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2\sin\vartheta(R\cos\vartheta - d)}{\sqrt{(R^2+d^2-2Rd\cos\vartheta)^3}}d\varphi d\vartheta dR$
Integracija po $d\varphi$ daje 2π dok se integracija po $d\vartheta$ svodi na računanje integrala
$\int_0^{\pi}\frac{\sin\vartheta(R\cos\vartheta - d)}{\sqrt{(R^2+d^2-2Rd\cos\vartheta)^3}}d\vartheta$
koji se supstitucijom $x = \cos\vartheta$ svodi na razliku integrala
$\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{(\alpha - x)^3}} - \int_{-1}^{1}\frac{\beta dx}{\sqrt{(\alpha - x)^3}}$
gdje je $\alpha = \frac{R^2+d^2}{2Rd}$ i $\beta = \frac{d}{R}$.
U tablicama neodređenih integrala (Bronstein ili Gradstein-Ryzhik) pronalazimo
$\int\frac{xdx}{\sqrt{(\alpha - x)^3}} = 2(\sqrt{\alpha - x} + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha - x}})$
$\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha - x)^3}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha - x}}$
Sada je trivijalno uvrstiti granice integracije i izračunati gornju razliku. Koristeći izraze za α i β lako vidimo da je ova razlika jednaka nuli (detalje ovog izvoda prepuštamo čitatelju).
Inače ovakvi se problemi puno lakše rješavaju primjenom Gaussovog teorema koji kaže da je tok vektorskog polja kroz zatvorenu plohu jednak volumnom integralu divergencije toga polja po području koje ta ploha zatvara.
$\int_S \vec{G}d\vec{S} = \int_V \nabla\vec{G}dV$
Sad uzmemo sfernu plohu radijusa d sa središtem u centru kugle. Pošto je divergencija gravitacijskog polja proporcionalna gustoći mase koja to polje stvara i pošto u području koje zatvara promatrana sfera nema nikakve mase, desna strana je jednaka nuli, pa je zbog simetrije problema i gravitacijsko polje $\vec{G}$ jednako nuli. Dakle unutar šupljine smještene u "sredinu" masivne kugle vlada bestežinsko stanje.

Čitatelj može provjeriti da li ova tvrdnja vrijedi ako bi zakon gravitacije bio dan izrazom
$F = \frac{Gm_1m_2}{r^3}$
tj. ako bi sila koja djeluje među tijelima mase m ovisila o kubu udaljenosti, ako bi joj smjer ponovno odgovarao smjeru spojnice tih dvaju tijela i ako bi se ponovno radilo o privlačnoj sili. (Na osnovi Gaussovog teorema (odnosno činjenice da pri gornjoj integraciji nulu dobivamo već pri integraciji po kutovima), može se lako vidjeti da bi gornja tvrdnja o bestežinskom stanju vrijedila i u ovom slučaju, kao što bi vrijedila i u slučaju kada bi gustoća materijala od kojega je kugla sačinjena ovisila o dubini tj. o varijabli r - što je prirodno za pretpostaviti - gravitacijsku silu unutar kugle mogla bi dati samo nejednolika raspodjela materije u njezinom plaštu, a na osnovi eksperimenata s akceleracijom sile teže vidimo da to nije slučaj ili neki "neizotropni" zakon gravitacije). Inače, treba napomenuti da ovakva "igra" s prirodnim zakonima ne služi ničemu - jer što će nam primjerice zakon gravitacije koji uopće ne odgovara iskustvu (i koji ničemu ne može poslužiti, osim "dokazivanju" da je netko "u pravu"). Ako se matematika može shvatiti kao igra po pravilima koje smo sami smislili i sa simbolima koji nemaju nikakvo dublje značenje, kod teorijske fizike je stvar u tome da rezultati do kojih ona dolazi dosta dobro odgovaraju onome što se događa u životu, odnosno onome što smo utvrdili eksperimentalno.
Čitatelj za vježbu može izračunati kolika bi trebala biti gustoća zemlje (odnosno Zemlje) ako bi ona zbilja bila sferna "ljuska" debljine par desetaka kilometara kako tvrdi spomenuti "teoretičar". Masa Zemlje (utvrđena također na osnovi Newtonovog zakona gravitacije) iznosi $6 * 10^{24}kg$.