# BESKONAČNOST U MATEMATICI I INFINITEZIMALNI RAČUN

Pojam beskonačnoga oduvijek je za ljude predstavljao jednu veliku misteriju, nedokučivu tajnu, pretešku ili nerješivu zagonetku koja, u određenom smislu, sadrži i elemente paradoksa. Uistinu, nema sumnje da je beskonačnost nešto što izmiče našim spoznajnim naporima, nešto što se ne da u potpunosti obuhvatiti, predstaviti, razjasniti ni ljudskim zorom, ni apstraktnim razmišljanjem, ni na bilo koji drugi konkretniji ili manje konkretan način, nešto tako veliko da prema svemu sudeći ne može stati u ljudsku glavu. Međutim, treba reći kako ipak postoje načini da s beskonačnošću barem u određenoj mjeri "izađemo na kraj". Jedan od tih načina razvijen je u matematici i o tome će biti govora u ovom tekstu.

U razmatranju pojma beskonačnoga najprije treba reći da postoje razne beskonačnosti, odnosno da sasvim sigurno "sve beskonačnosti nisu iste". Tako se beskonačnost u matematici odnosi na, recimo to tako, "svijet ideja", pa ovdje govorimo o beskonačno velikom broju ili brojevima, beskonačnim skupovima, geometrijskim objektima beskonačne mjere, beskonačnodimenzionalnosti sl. Nasuprot tome, beskonačnost u svijetu koji nas okružuje ili "fizikalna beskonačnost" povezuje se prvenstveno s prostorom u kojemu živimo, premda je nejasno je li taj prostor uistinu beskonačan (beskonačne veličine) ili nije, povezuje se ponekad i s vremenom, za koje je pitanje o njegovoj beskonačnosti, u nekom "objektivnom smislu", slična nepoznanica, a također se ponekad govori o beskonačnom broju "gradivnih elemanata materije", koje možemo nazvati "elementarnim česticama", o beskonačno mnogo mogućnosti njihovog "kombiniranja", o beskonačnom spektru frekvencija tj. energija zračenja (valova) različitih vrsta, o beskonačno mnogo "stanja" raznih dinamičkih sistema i sl. Također se s ovim u vezi može govoriti o aktualnoj (aktualiziranoj) i potencijalnoj beskonačnosti i to su već stvari koje ulaze u domenu filozofskih teorija odnosno spekulacija.

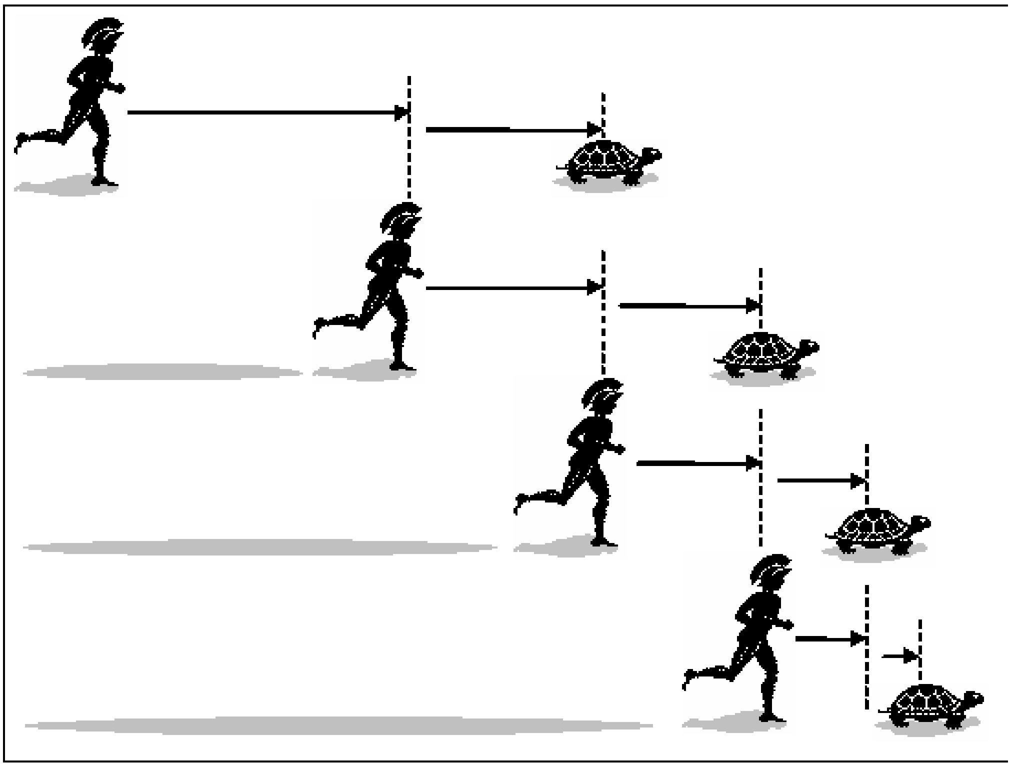
Naglasimo kako osim beskonačnosti u smislu "neograničeno velikog", postoji i beskonačnost u smislu "neograničeno malog", pa tako u matematici govori o beskonačno malim (infinitezimalnim) veličinama, dok se u fizici postavlja pitanje može li se prostor u kojemu živimo dijeliti do u beskraj ili njega sačinjavaju neki konačni elementi, "kvanti prostora". To se isto pitanje postavlja i za vrijeme. Uz to, nejasno je jesu li spomenuti gradivni elementi materije "matematičke točke", dakle beskonačno malenih dimenzija ili imaju neku "protežnost".

Nije poznato kada su ljudi prvi puta došli do ideje beskonačnosti, vjerojatno je to bilo vrlo davno. Beskonačnost u matematici razmatrali su, kako je vidljivo iz sačuvanih spisa, Stari Indijci već početkom prvog tisućljeća prije Krista. Značajne uspjehe u matematičkom tretiranju beskonačnosti, odnosno u računanju s beskonačnim tj. infinitezimalnim veličinama, postigli su Stari Grci. Jedan lijep primjer ovakvog računanja vezan je uz poznati "Zenonov paradoks Ahileja i kornjače" koji je, koliko znamo, bio razriješen matematičkim putem još u antičko doba - ovo rješenje bilo je poznato slavnom Arhimedu iz Sirakuze koji je razvio i neke općenitije metode putem kojih se mogu rješavati problemi ove vrste. Inače, filozofskim je argumentima ovaj paradoks razjasnio Aristotel još ranije.

Premda su čitatelji sigurno upoznati s ovom pričom, reći ćemo o tome ipak nešto više radi potpunosti. Zenon iz Eleje bio je starogrčki filozof iz V stoljeća prije Krista, uz Parmenida najznačajniji predstavnik "Elejske filozofske škole" koja je naučavala kako sav "osjetilni svijet", dakle sve ovo što vidimo oko sebe, predstavlja puki privid, a da uistinu postoji samo jedno i jedinstveno Biće koje je "nemijenjajuća i neuništiva cjelina". Da bi potkrijepio ovu tezu, ovaj je veliki predsokratovac pokušao je pokazati kako niti jedno tijelo u svom gibanju ne može "prestići" neko drugo tijelo, što bi onda dokazivalo prividnost svakog gibanja u prirodi.

Zenonov argument bio je sljedeći - Promatrajmo utrku Ahileja i kornjače kod koje je kornjača u trenutku starta bila negdje ispred Ahileja. Ahilej će, nakon što je utrka započela u određenom vremenskom intervalu doći u točku iz koje je kornjača "startala", no u tom vremenu kornjača će se pomaći na neki udaljenost od svoje startne pozicije. Dok Ahilej prevali tu udaljenost, kornjača će se još malo pomaći naprijed, dok Ahilej stigne do te sljedeće pozicije kornjače, ona će se ponovno pomaknuti naprijed itd. do u beskraj, pa prema tome Ahilej nikada ne bi mogao sustići kornjaču, jer bi ona u svakom trenutku bila barem malo ispred njega (vidi sliku 1).

Treba naglasiti da se ovdje radi (što je manje poznato) o vrlo suptilnom problemu čije je razmatranje u značajnoj mjeri utjecalo na razvoj matematike, posebice njezinih logičkih osnova, tokom mnogih stoljeća njezinog razvoja. No usprkos tome, "formalno" razjašnjenje toga problema (na tim logičkim osnovama) prilično je jednostavno. Naime, stvar je u tome što premda imamo beskonačno mnogo intervala puta, a prema tome i intervala vremena tokom kojih Ahilej dostiže kornjaču, njihov je zbroj konačan, što znači da kornjača biva dostignuta nakon prevaljenog konačnog puta, pa dakle i u konačnom vremenu. Ovo vrlo lako vidimo ako pretpostavimo da kornjača ide deset puta sporije od Ahileja (što možda nije realno jer je kornjača sporija, ali se pokazuje zgodnim u razmatranju koje slijedi) i da ima prednost od jednog kilometra ispred Ahileja. Izračunajmo duljinu puta koji će prevaliti Ahilej odnosno kornjača do trenutka kad će se naći poravnati, tj. u trenutka u kojemu Ahilej upravo prestiže kornjaču.

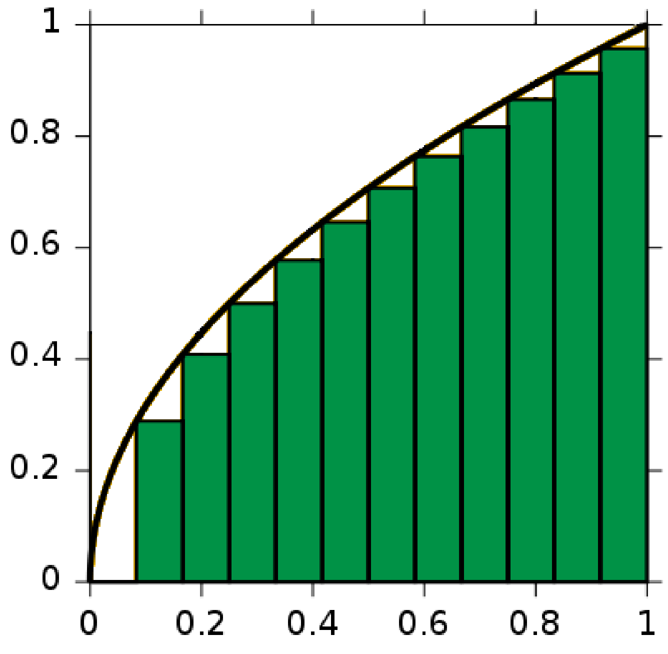


Slika 1 - Zenonov paradoks - Ahilej pokušava dostići kornjaču

Jasno je da će do trenutka kad se Ahilej našao u točki iz koje je kornjača krenula, kornjača prevaliti 1/10 km, do trenutka kad se Ahilej našao na toj, novoj poziciji kornjače, ona će prevaliti još 1/100 km, do trenutka kad se Ahilej našao na ovoj još novijoj poziciji, kornjača će prevaliti još 1/1000 km itd. Dakle do trenutka kad će se naći poravnati, kornjača će prevaliti put
$s_k$ = 1/10 + 1/100 + 1/1000 + 1/10.000 + ... [km] = 0,1 + 0,01 + 0,001 + 0,0001 + ... [km] = 0,11111... [km]
gdje se u toj ukupnoj sumi jedinice ponavljaju do u beskonačnost. Prevaljeni put za kornjaču iznosi dakle 111,1111... metara, dok je u slučaju Ahileja taj put za kilometar duži (dužine 1.111,1111... metara). Ako pretpostavimo da se kornjača giba brzinom od recimo 0.5 km/h, a Ahilej brzinom od 5 km/h (10 puta brže) do "poravnavanja" će doći nakon vremena $t$ = 1.111/5 [h] = 0.111/0.5 [h] = 0,2222... [h] = 13.3333... [min] što je dakako konačno vrijeme, tako da u ovoj priči nikakvog paradoksa nema. Svi ovi brojevi koje smo izračunali imaju doduše beskonačno mnogo decimalnih znamenki iza zareza, ali nisu beskonačno veliki.
Ono što se pokazuje ovim računom, jest da je moguće zbrojiti ne samo konačno mnogo, nego i beskonačno mnogo brojeva i dobiti konačan rezultat. No, dakako, za konačan rezultat jedne takve sume, pribrojnici ne mogu biti bilo kakvi - u konkretnom slučaju vidimo da su ti brojevi sve manji i manji (svaki je deset puta manji od prethodnog) - prvi interval prijeđenog puta koji smo razmatrali tako iznosi 0,1 km = 100 m, dok deseti iznosi 0,0000000001 km = 0,0000001 m = 0,0001 mm ili 0,1 tisućinku milimetra. Za ovakve brojeve možemo reći da čine niz čiji elementi postaju infinitezimalni tj. beskonačno maleni - svaki je od njih sve bliže nuli, ali nije nula (konkretno, ovdje se radi o tzv. "geometrijskom nizu"). U modernijoj terminologiji govori se o nizu koji "teži prema nuli" ili "čiji je limes nula". A niz konačnih suma elemenata toga niza, kako smo vidjeli teži prema broju, tj. kao svoj limes ima broj 0,1111... = 1/9 koji smo izračunali ranije. Na ovaj način uvodi se pojam limesa ili granične vrijednosti beskonačnog niza brojeva. Limes (niza) se definira kao broj prema kojemu se svaki sljedeći član niza sve više približava po svojoj vrijednosti i pritom im je razlika sve bliža nuli. Jasno, svi nizovi ne moraju imati limes, a ako ga imaju, on ne mora biti jedinstven. Tako recimo niz prirodnih brojeva (1, 2, 3, 4, ...) nema limesa (koji bi bio prirodan ili realan broj - možemo eventualno reći da je taj limes beskonačno).
Zahvaljujući pojmu limesa pokazuje se mogućim riješiti razne probleme koje u okvirima elementarne matematike ostaju nerješivi. Pojam limesa koristi se tako u integralnom računu pomoću kojega se mogu odrediti površine raznih kompliciranih geometrijskih likova ili volumeni geometrijskih tijela, određivati

položaji težišta tijela i sl, a koji vrlo važnu ulogu ima i u fizici. Ovdje se zapravo radi o računanju limesa suma određenih izraza kada broj pribrojnika tim sumama postaje beskonačno velik (infinitan), a sami pribrojnici postaju beskonačno mali (infinitezimalni).

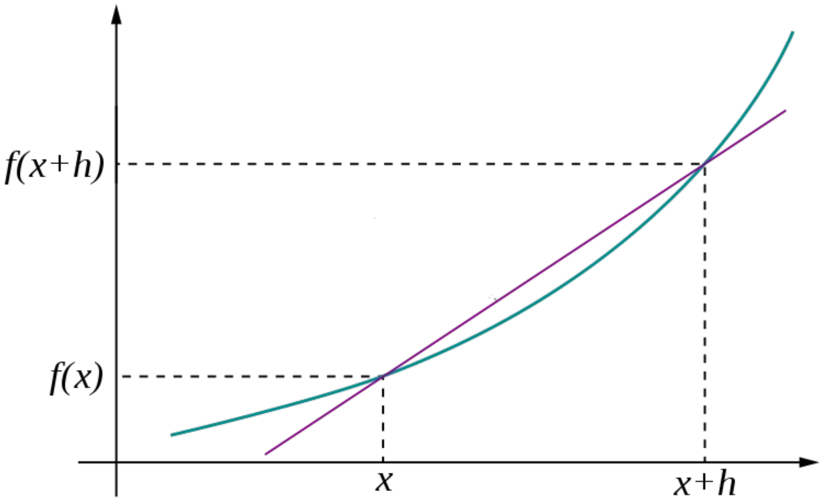
Ideju integralnog računa možemo predočiti na primjeru računanja površine "ispod" parabole u koordinatnom sustavu (vidi sliku 2). Ta se površina, omeđena dakle lukom parabole, apscisom koordinatnog sustava i okomicom na određenu vrijednost na apscisi - uzmimo da je ta vrijednost jednaka 1 - može aproksimirati tj. približno predstaviti nizom pravokutnika (jednake "širine") koji su u nju "upisani", kako je prikazano na slici. Tražena površina, koja je po definiciji "integral" funkcije koja predstavlja parabolu (ovdje se konkretno radi o funkciji $f(x)=\sqrt{x}$ ) u intervalu između nula i jedan, očito će se bolje aproksimirati tj. predstaviti pravokutnicima što je "širina" pravokutnika (duljina njegove horizontalne stranice) manja - pri čemu će broj "upisanih" pravokutnika, dakako, biti sve veći. Prema tome, "integral" o kojemu je riječ, a koji odgovara traženoj površini "ispod" parabole, može se napisati kao limes sume površina jednog takvog mnoštva pravokutnika čiji broj teži prema beskonačnom (primijetimo da je ova suma oblika $\Delta x \cdot f(0 \cdot \Delta x)+\Delta x \cdot f(1 \cdot \Delta x)+\Delta x \cdot f(2 \cdot \Delta x)+...+\Delta x \cdot f(n \cdot \Delta x)$ , što je u našem konkretnom slučaju jednako $\Delta x \sqrt{(\Delta x)} \cdot (\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+...+\sqrt{n})$ , gdje veličina $\Delta x$ , koja predstavlja duljinu horizontalne stranice pravokutnika postaje infinitezimalnom, a $n$ koji predstavlja njihov broj postaje beskonačnim, ali tako da vrijedi $\Delta x \cdot n=1$ ). Pokazuje sa da se taj limes može izračunati, kao što se mogu izračunati slični limesi i za velik broj drugih funkcija, posebno one "elementarne" (kakva je i funkcija "korjenovanja" koja se pojavljuje u slučaju uzetom za primjer). U tom konkretnom zadatku, gdje tražimo površinu "ispod" dane parabole u intervalu između 0 i 1, rješenje iznosi 2/3. Inače, treba reći kako pri računanju ove vrste nitko uistinu ne ide računati spomenute limese, nego se služi dobro poznatim "pravilima za integriranje funkcija" ili potrebne matematičke formule ("neodređene integrale") pronalazi u odgovarajućim tablicama.




Slika 2 - Računanje površine (integracija) područja "ispod" parabole

Još jedno značajno matematičko područje u kojemu se susrećemo s infinitezimalnim veličinama i u kojemu pojam limesa ima veoma značajnu ulogu, predstavlja diferencijalni račun koji, kao što ćemo vidjeti nešto kasnije, s integralnim računom stoji u uskoj vezi. Diferencijalni račun omogućava rješavanje "problema tangente" tj. određivanja pravca tangencijalnog na krivulju u zadanoj točki koordinatnog sustava, pronalaženje ekstrema i ponašanja velikog broja funkcija, te rješavanje raznih drugih matematičkih problema, a izuzetno je značajan i u fizici s obzirom da je većina fizikalnih zakona matematički formulirana u obliku diferencijalnih jednadžbi (jednadžbi što uključuju "derivacije" funkcija koje opisuju određene fizikalne veličine).

Diferencijalni račun, odnosno postupkak "deriviranja" funkcija možemo prikladno rastumačiti na primjeru upravo spomenutog problema određivanja pravca tangencijalnog na krivulju u koordinatnom sustavu. Očito je, kao što se vidi iz slike 3, da "nagib" (koeficijent smijera) tangente na krivulju u točki $x$ može aproksimirati omjerom razlike vrijednosti funkcije $f(x)$ u točkama $x$ i $x + h$ te razlike vrijednosti koje te dvije točke predstavljaju (gledamo dakle kvocijent $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ) i to i to tim bolje što je veličina $h$ manja. Prema tome, pri razmatranju ovoga problema treba gledati limes takvog kad $h$ teži prema nuli, koji nazivamo derivacijom funkcije $f(x)$ u točki $x$. Dakle, pri postupku deriviranja računaju se limesi kvocijenata određenih izraza u kojima dividend i divizor postaju infinitezimalni, tj. teže prema nuli.




Slika 3 - Određivanje derivacije funkcije $f(x)$ u točki $x$

Zanimljivo je promotriti jednu fizikalnu interpretaciju računskog postupka o kojemu je ovdje riječ. Pretpostavimo da funkcija koju razmatramo predstavlja put koji prelazi tijelo krećući se pravocrtno u vremenu $t$ - tu funkciju uobičajeno je označavati sa $x(t)$ . Nije teško zaključiti da derivacija ove funkcije (po vremenu) predstavlja zapravo trenutačnu brzinu tijela u trenutku $t$ - jer brzina upravo po svojoj definiciji odgovara kvocijentu puta koji je tijelo prešlo u nekom vremenskom intervalu i duljine (trajanja) toga intervala. Ako je interval konačan, ovaj kvocijent daje nam zapravo srednju brzinu u tom intervalu (napominjemo da, dakako, ova brzina ne mora stalno biti ista), a ako je infinitezimalan, tj. ako teži preme nuli, on predstavlja trenutačnu brzinu tijela u vremenskom trenutku u kojemu se računa ova derivacija. Dakle, trenutačna brzina tijela (koja je obično označava s $v(t)$ je derivacija funkcije koja opisuje ovisnost prijeđenog puta o vremenu $x(t)$ , tj. položaj tijela u danoj vremenskoj "točki" (trenutku $t$ ).
No zamislimo sada obrnuti slučaj, da je zadana funkcija $v(t)$ koja predstavlja trenutačnu brzinu tijela u svakom trenutku vremena. Može li se na osnovi ove funkcije dobiti funkcija $x(t)$ koja opisuje trenutni položaj tijela u svakom vremenskom trenutku $t$ tj. možemo li na osnovi poznavanja brzine tijela u svakom trenutku pronaći njegov trenutačan položaj u prostoru (napominjemo da ovdje promatramo gibanje po pravcu tj. u jednoj dimenziji radi jednostavnosti, no sve ostaje isto i u tri dimenzije). Odgovor je da možemo, ali uz uvjet da je poznat položaj (pozicija) tijela u nekom početnom trenutku (recimo u trenutku $t=0$ ). Zaista, ako je zadan početni položaj tijela $x_0$ i funkcija $v(t)$ , tada položaj tijela u trenutku $t=T$ nalazimo sumiranjem produkata trenutačne brzine tijela u trenutku $t$ i infinitezimalnog intervala $\Delta t$ vremena tokom kojega se tijelo giba tom brzinom (što upravo odgovara prijeđenom putu u ovom intervalu), pa možemo napisati $x(t)=x_0+\Delta t\cdot x(0\cdot\Delta t)+\Delta t\cdot x(1\cdot\Delta t)+\Delta t\cdot x(2\cdot\Delta t)+...+\Delta t\cdot x(n\cdot\Delta t)$ gdje je $n\cdot\Delta t=T$ . No, ova se formula tek za prvi pribrojnik $x_0$ razlikuje od izraza koji se pojavljuje pri računanju integrala neke funkcije, napisanog nešto ranije. Ovu bi vezu dakako trebalo elaborirati s puno više detalja, no na ovom mjestu dovoljno je napomenuti kako se na ovaj način pokazuje da je "integriranje postupak obrnut od postupka deriviranja" - možemo otprilike reći da ako deriviranjem funkcije $f(x)$ dobijemo funkciju $f'(x)$ , tada će se pri integriranju funkcije $f'(x)$ pojaviti (kao "neodređeni integral") funkcija $f(x)$ .
Ova formulacija (premda neprecizna) izražava suštinu osnovnog teorema infinitezimalnog računa do kojeg su došli njegovi utemeljitelji, veliki engleski matematičar i fizičar Isaac Newton i veliki njemački matematičar i filozof Gottfried Wilhelm Leibniz, i to gotovo istodobno, tokom šezdesetih godina 17. stoljeća. Inače, treba napomenuti kako se termin infinitezimalni račun ili "račun s beskonačno malim veličinama", kojim se označavalo područje diferencijalnog i integralnog računa, te računa raznih drugih

limesa, danas uglavnom ne koristi (jer su matematičari svojedobno zaključili da je pojam infinitezimalne veličine previše "mutan"), a njegove se "teme" razmatraju unutar mnogo šireg matematičkog područja koje nazivamo matematičkom analizom.

Kao što smo već ranije napomenuli "preteče" ove teorije (tj. teorija) bili su matematičari Stare Indije i Grčke, a posebno značajne rezultate postigao je u antičko doba Arhimed, čijim se prethodnikom može smatrati Eudokso iz Knida. U srednjem vijeku na ovom se području istakao veliki perzijski učenjak Nasir al din al Tusi, a kasnije i novovjekovni matematičari kao što su Rene Descartes, Bonaventura Cavalieri, Blaise Pascal, John Wallis, Christian Huygens. Nakon Newtonowog i Leibnizovog "proboja" (otkriće spomenute veze postupka integriranja i deriviranja, kao i uvođenje odgovarajuće notacije pojednostavnilo je rješavanje brojnih problema), ovo se područje matematike razvija vrlo intenzivno, tim prije što je, kako smo već napomenuli, to postao "jezik" na kojemu su se počeli izražavati fizikalne zakonitosti. Tako nije nimalo čudno što je Isaac Newton, jedan od njegovih utemeljitelja ujedno izgradio i klasičnu mehaniku. Za dalji razvoj infinitezimalnog računa naročito su zaslužni veliki matematičari 18. stoljeća poput Johanna Bernoullija, Leonharda Eulera, Colina Maclaurina, Jean le Rond d'Alemberta, Joseph-Louisa Lagrangea, Pierre-Simona Laplacea, i dr, a zatim su taj razvoj nastavili Carl Friedrich Gauss, Augustin-Louis Cauchy, Bernhard Riemann i Karl Weierstrass koji je na svoj način "protjerao" pojam infinitezimalne veličine iz ovoga dijela matematike (pa se od njegovog doba termin "infinitezimalni račun" i ne koristi). Početkom 20. stoljeća značajne rezultate na području integralnog računa ostvario je francuski matematičar Henry Lebesgue koji je razvio teoriju "Lebesgueovog integrala", dok se na području diferencijalnog istakao jedan drugi francuski matematičar, Elie Cartan, koji je uveo pojam "diferencijalne forme". Sav ovaj napredak potakao je također i razvoj drugih matematičkih teorija kao što su teorija mjere, teorija diferencijalnih i integralnih jednadžbi, diferencijalna geometrija i sl.

Na koncu ovoga razmatranja možemo se zapitati - Da li te "infinitezimalne" tj. "beskonačno male" veličine (brojevi) postoje ili ne? Da li postoje beskonačno velike veličine tj. brojevi? Moglo bi se reći da to ovisi o matematičkom formalizmu (točnije aksiomatici) koju koristimo u svom zaključivanju. U "standardnoj" matematičkoj analizi koju koristimo u "svakodnevnom životu", ovakve veličine ne postoje kao aktualne (aktualizirane), već jedino u smislu "granične vrijednosti", limesa, kao nešto čemu se možemo dovoljno dobro približiti, ali ne možemo dostići. Međutim, tokom prošlog stoljeća razvijene su matematičke teorije ("nestandardna analiza") u kojima ovakve, infinitezimalne i infinitne veličine postoje "aktualno", kao elementi određenog skupa - radi se o skupu tzv. "hiperrealnih brojeva" - i s njima se može računati kao i sa drugim "brojevima" (no to je već jedno vrlo apstraktno područje na kojemu se "brojevi" definiraju na prilično kompleksan način - preko nizova realnih brojeva s određenim svojstvima).

Inače, što se tiče pojma beskonačno velikoga u matematici, značajan uspjeh u njegovom shvaćanju i tretiranju postignut je na jednom drugom matematičkom području, u teoriji skupova, koju je krajem 19. st. utemeljio njemački matematičar Georg Cantor. On je tako, koristeći se svojim "dijagonalnim postupkom", dokazao da realnih brojeva (ili točaka na pravcu) ima više nego prirodnih brojeva, odnosno da se skup realnih brojeva "ne može prebrojavati", što pak znači da postoje barem dvije vrste beskonačnosti u matematici, od kojih je ona vezana uz brojnost (kardinalnost) prirodnih brojeva "manja" od one vezane uz brojnost realnih (ovaj zaključak zapisuje se u obliku $\aleph_0 < \aleph_1$ gdje se oznake - "alef nula" i "alef jedan" - alef je prvo slovo hebrejskog alfabeta - simboliziraju "broj elemenata" ovih dvaju skupova). No, treba reći kako beskonačnost u teoriji skupova dovodi do mnogih nedoumica i paradoksa, kakav je primjerice "Hilbertov paradoks beskonačnog hotela" u koji se, usprkos tome što je "pun", uvijek može smjestiti ne samo konačno, nego i beskonačno mnogo novopristiglih gostiju. Tu su i puno ozbiljniji paradoksi, kao što je recimo onaj Banacha i Tarskog o dekompoziciji sfere, vezan uz problem "aksioma izbora" primijenjenog na određene beskonačne skupove.

Sve u svemu, usprkos velikim matematičkim otkrićima i brzom razvoju ove znanosti u moderno vrijeme, izgledno je da će se matematičari još dugo natezati s problemom beskonačnosti u matematici (možda i beskonačno dugo), a da će i beskonačnost u svijetu u kojemu živimo (recimo beskonačnost Svemira) biti vrlo teško dokazati ili opovrgnuti.

Zagreb, kolovoz 2013.