NEEUKLIDSKE GEOMETRIJE

Ostalo je zabilježeno kako je veliki njemački matematičar K. F. Gauss negdje početkom dvadesetih godina XIX. stoljeća izveo neobičan eksperiment - koristeći se teodolitom (instrumentom za mjerenje kutova) izmjerio je kutove trokuta koji zatvaraju tri planinska vrha u središnjoj Njemačkoj - Brocken, Hohehagen i Inselberg i zatim provjerio koliko iznosi njihov zbroj. Rezultat toga mjerenja, odnosno zbroj izmjerenih kutova iznosio je $179^o 59' 59{,}320''$. S obzirom da je odstupanje (0,680 lučnih sekundi) bilo manje od pogreške mjerenja, Gauss je zaključio da se tim eksperimentom ne može utvrditi odstupa li zbroj kutova u trokutu od 180^o ili ne.

Sad će se možda netko zapitati - Zar zbroj kutova u trokutu ne mora uvijek biti 180^o (kao što smo to učili u školi)? Da bismo odgovorili na ovo pitanje, vratimo se još više od dva tisućljeća unazad, na početak 3. stoljeća prije nove ere, u vrijeme kad je još jedan veliki matematičar, aleksandrijski Grk po imenu Euklid pisao svoje Elemente, knjigu koja je u idućih 2000 godina, osim što je bila standardni udžbenik iz geometrije, predstavljala primjer deduktivne metode u znanosti i uzor znanstvenog mišljenja uopće. Euklid je, naime, pod utjecajem starogrčkih mislilaca (u prvom redu Platona i Aristotela), koji su prvi formulirali zakone pravilnog mišljenja (logiku), pokušao skupiti sva dotadašnja saznanja o prostoru u sustav u kojemu bi se većina zakonitosti i spoznaja mogla izvesti logičkim mišljenjem iz relativno malog broja istina do kojih se došlo promatranjem i pokusima.

Svoje djelo Euklid započinje nabrajanjem osnovnih činjenica koje se odnose na njegov sustav, podijeljenih na definicije, aksiome i postulate. Neke od definicija koje daje Euklid - poput recimo one da je "točka ono što nema dijelova" ili da je "krivulja dužina bez širine" ne zvuče baš logički korektno, no one nisu ni važne jer se u Elementima uopće i ne upotrebljavaju. Važniji su aksiomi i postulati. Aksiomi su uglavnom razumljivi sami po sebi, kao npr. onaj prvi koji kaže da "su oni koji su jednaki jednom te istom, jednaki i međusobno" ili drugi koji kaže da će "ako jednakima dodamo jednake, i dobivene cjeline biti jednake". Postulata ima pet i oni su slijedeći:

1. Od svake točke do svake druge točke može se povući pravac.
2. Omeđen dio pravca može se neprekidno produžiti po pravcu.
3. Iz svakog centra sa svakim otvorom (polumjerom) može se opisati kružnica.
4. Svi su pravi kutovi međusobno jednaki.
5. Ako dva pravca presiječemo trećim pravcem i ako on s njima zatvara s jedne strane unutrašnje kutove čiji je zbroj manji od dva prava, onda se ta dva pravca produžena u beskonačnost sijeku, i to upravo s te strane.

Nakon nabrajanje ovih osnovnih činjenica Euklid svoje Elemente nastavlja teoremima koji se izvode iz postulata i aksioma, odnosno popraćuju dokazom.

Ako bolje razmotrimo navedene postulate odmah vidimo da su prva četiri prilično očigledna i razumljiva. No onaj peti baš i nije, njegova je formulacija relativno složena, tako da treba nešto vremena dok shvatimo "što se to njime tvrdi", a i kad nam to uspije, njegova nam tvrdnja baš ne izgleda očitom. Naime, ako spomenuta dva pravca zatvaraju s trećim unutrašnje kuteve čiji se zbroj ne razlikuje mnogo od dva prava, onda tvrdnju postulata ne možemo tako lako provjeriti - točka presjeka dvaju spomenutih pravaca neće recimo stati na naš crtež, pa je upitno da li uopće postoji. Cijeli je problem zapravo u tome što se u vezi s petim postulatom pojavljuje pojam beskonačnoga.

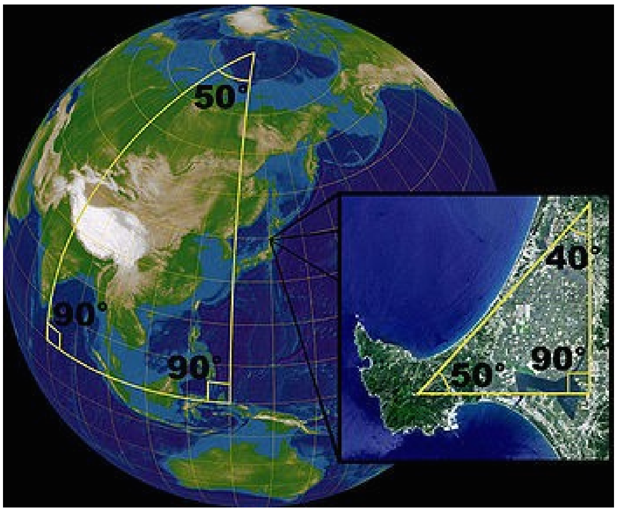
Nije dakle čudno što je još u antičkim vremenima peti Euklidov postulat privukao osobitu pažnju matematičara. Želeći da izgrade logički besprijekoran sustav geometrije, oni su pokušali naći neku novu, jednostavniju formulaciju petog postulata ili ga dokazati iz ostalih postulata i aksioma. No, svi su ti, inače mnogobrojni, pokušaji bili neuspješni. Problemom petog postulata bavili su se najpoznatiji antički matematičari poput Arhimeda i Apolonija iz Perga, zatim su njihov rad nastavili oni arapski, pa matematičari evropske renesanse. No rezultata nije bilo. Posebno su zanimljivi bili radovi talijanskog matematičara G. G. Saccherija koji je početkom tridesetih godina 18. st. u svojoj raspravi "Euclides ab Omni Naevo Vindicatus" ("Euklid oslobođen od svih grešaka") razvio geometrijski sustav različit od Euklidova polazeći od tvrdnje suprotne petom postulatu. Pošto je smatrao da je u tom sustavu pronašao proturječnosti, bio je uvjeren da je tako dokazao valjanost petog postulata. Međutim, te su se proturječnosti pokazale samo prividnim. Neki zanimljivi radovi koji se odnose na problematiku "petog postulata" potječu i od francuskog matematičara A.

M. Legendrea koji je djelovao nešto kasnije, ali niti njegov trud nije urodio uspjehom.
No svi ti napori nisu bili uzaludni. Na ovaj se način došlo do mnogih zanimljivih rezultata u geometriji, pa i onih koji su omogućili konačno razrješenje problema "petog postulata". Tako je primjerice dokazano da je tvrdnja petog Euklidova postulata ekvivalentna tvrdnji da je zbroj kutova u trokutu jednak 180^{o}, odnosno tvrdnji da postoji samo jedan pravac paralelan zadanom pravcu koji prolazi kroz neku zadanu točku koja ne pripada tome pravcu. I konačno se počelo naslućivati da je korijen svim ranijim neuspjesima u tome što se peti postulat uopće i ne može učiniti "očiglednim", odnosno dokazati služeći se ostalim postulatima i aksiomima geometrije. A ako je tako, onda bi slijedilo da je moguć i drugi geometrijski sustav u kojem bi se umjesto petog postulata mogla uzeti njemu proturječna tvrdnja.
Priča o Gaussovom eksperimentu s početka teksta pokazuje da je ovaj veliki matematičar zasigurno došao na tu pomisao. No Gauss o ovoj temi nikada ništa nije napisao. Prvi koji je pokazao neproturječnost geometrijskog sustava u kojemu peti euklidov postulat ne vrijedi, bio je ruski matematičar N. I. Lobačevski. On je u svojim istraživanjima najprije obradio onaj dio geometrije koji se može izvesti bez upotrebe petog euklidovog postulata (kasnije nazvan apsolutnom geometrijom), a zatim dokazao da pretpostavka o tome da je u ravnini kroz jednu točku moguće povući više pravaca koji ne presjecaju zadani pravac, nije proturječna apsolutnoj geometriji. Tako je pokazao da je peti postulat uistinu nezavisan od prva četiri i da je zaista moguće razviti geometrijski sustav različit od onog Euklidovog (euklidskog). Lobačevski je svoje otkriće objavio godine 1826, a kasnije je s njime u vezi objavio niz opsežnih radova. Nešto kasnije, godine 1832. pojavio se i rad mađarskog matematičara J. Bolyaija koji je neovisno o Lobačevskom došao do istih rezultata.
Geometrija koju su razvili Lobačevski i Bolyaji samo je jedan primjer neeuklidske geometrije koji se naziva hiperboličkom geometrijom. U hiperboličkoj je geometriji dakle, kroz zadanu točku moguće povući beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku neki zadani pravac (hiperparalele), a može se pokazati da je zbroj kutova u trokutu manji od dva prava (180^{o}).
Radovi osnivača neeuklidske geometrije izazvali su veliku nevjericu u matematičkim, a i širim krugovima, no do sredine XIX st. istraživanja drugih matematičara pokazala su da je neeuklidska geometrija Lobačevskog i Bolyaija jednako tako logički besprijekorna i neproturječna kao i ona euklidska, odnosno da su ove dvije geometrije ekvikonzistentne (hiperbolička geometrija logički je konzistentna ukoliko je to i euklidska geometrija, a vrijedi i obrnuto). Ovdje treba naročito istaknuti rad talijanskog matematičara E. Beltramija koji je pokazao da hiperbolička planimetrija može "realizirati" na plohi zvanoj pseudosfera (ploha koja ima "konstantnu negativnu zakrivljenost" - nasuprot sferi koja ima "konstantnu pozitivnu zakrivljenost" obrnuto proporcionalnu svome radijusu), kao i radove njemačkog matematičara B. Riemanna koji je izgradio još jedan neeuklidski sustav (točnije niz neeuklidskih sustava), tzv. eliptičku geometriju u kojoj, za razliku od one hiperboličke, ne postoje pravci koji se ne sijeku, a zbroj kutova u trokutu veći je od dva prava (u eliptičkoj geometriji osim petog treba modificirati i drugi euklidov postulat). Riemann je osim toga uveo neke posve nove geometrijske koncepte, kao što su pojam mnogostrukosti (odnosno "lokalnih koordinata"), metrike prostora i njegove zakrivljenosti, koji su predstavljali pravu revoluciju u razvoju geometrije. Tako su, za razliku od Lobačevskog i Bolyajija, koji su do neeuklidske geometrije došli razmatranjem geometrijske aksiomatike, Beltrami, a posebno Riemann otvorili put proučavanju neeuklidskih geometrija posredstvom geometrijskih objekata definiranih pomoću koordinatnog sustava (koje možemo shvatiti i kao "plohe" u prostorima određenih dimenzija).
Najjednostavniji model eliptičke neeuklidske geometrije može se realizirati na sferi (površini kugle) radijusa R. Zamislimo svijet (prostor) u kojemu osim ove sfere ne postoji ništa drugo (dakle ne postoje ni točke unutar sfere ni one izvan nje, već jedino one na sferi tj. površini kugle). Taj dvodimenzionalni prostor možemo prispodobiti površini Zemlje koja je savršeno "izglačana". Što bismo u takvom prostoru podrazumijevali pod pojmom "pravca"? Logično je "pravcem" podrazumijevati najkraću liniju koja povezuje sebi pripadne točke (odnosno smatrati ga određenim ovim zahtjevom). No, u ovom slučaju pravac očito ne može biti onaj "uobičajeni" pravac koji "probada" sferu kroz dvije zadane točke, jer takav pravac uopće ne pripada prostoru koji smo zamislili, osim u spomenute dvije točke, već unutrašnjosti sfere i njezinoj vanjštini koje, kao što smo rekli, ne postoje. Tako recimo pravcem koji povezuje dvije točke na površini Zemlje obično nećemo podrazumijevati onaj koji u prvoj točki zalazi u podzemlje, da bi u završnoj ponovno izbio na njezinu površinu, već ga smatramo određenim najkraćom spojnicom tih dviju točaka duž zemljine površine, a ova nam se spojnica čini "ravnom" (premda je "zakrivljena", čak i onda kad joj je duljina sasvim mala - dakako u idealiziranom slučaju), jer je radijus zakrivljenosti Zemlje za naše pojmove jako velik - oko 6370 km.
Najkraća spojnica (tzv. geodezik) dviju točaka na sferi zapravo je segment jednog od "meridijana" te sfere -

kružnice maksimalnog radijusa jednakog radijusu sfere R, određene središtem sfere i tim dvjema zadanim točkama. Pošto smo se dogovorili da takvu liniju nazivamo pravcem, ispada da se na sferi bilo koja dva pravca sijeku jer ne postoje dva meridijana koja se ne sijeku (pošto su ravnine svih meridijana određene središtem sfere). Također nije teško vidjeti i da je zbroj kutova bilo kojeg trokuta na sferi veći od dva prava i da je tim bliže iznosu od 180° što je trokut manjih dimenzija (v. sliku).

Hiperboličku geometriju nešto je teže predočiti, no razrađeni su modeli predstavljanja neeuklidskih geometrija kao što su Poincareov poluravanski model ili model "mreže sfera", u kojima većina tvrdnji o ovim geometrijama postaje očigledna.

U ovoj je priči važno istaći kako otkriće neeuklidske geometrije nije predstavljalo samo vrlo značajan napredak u geometriji, već je omogućilo i jedno novo, dublje viđenje matematike same i njezinih logičkih osnova, a u XX je stoljeću predstavljalo osnovu za razvoj suvremenih fizikalnih teorija, osobito opće teorije relativnosti.



(Slika je uzeta iz Wikipedije)

Za razliku od "klasične fizike" koja kao mjesto svoga događanja, pretpostavlja od sebe same nezavisan, euklidski svijet, u općoj teoriji relativnosti svijet je predstavljen četverodimenzionalnim geometrijskim objektom koji se naziva Riemannova mnogostrukost (koji uz tri prostorne dimenzije uključuje i dimenziju vremena), a fizika i geometrija toga svijeta povezane su posredstvom dinamičke jednadžbe (Einsteinova jednadžba). Prema ovoj teoriji, prostor u kojemu živimo nije euklidski tj. "ravan", barem ne lokalno, u blizini masivnih objekata, nego je u tim područjima "zakrivljen" (napomenimo da je za razliku od zakrivljenosti dvodimenzionalne plohe, zakrivljenost trodimenzionalnog tijela tj. "prostora" mnogo teže predočiti jer nam nedostaje iskustvo četvrte prostorne dimenzije u čijem se smjeru tijelo "savija"). Ova teorija čak predviđa postojanje objekata koji mogu toliko "zakriviti" prostor da predstavljaju "ponore" za pravce, odnosno svjetlosne zrake koji im prolaze preblizu - ovakvi se objekti nazivaju "crnim jamama". Iako postoje uvjerljivi eksperimentalni dokazi za njihovo postojanje, čini se da pitanje postojanja crnih jama, a pogotovo njihove prirode još uvijek nije definitivno riješeno. Također nije riješeno niti pitanje "globalne geometrije" našeg svijeta, koje je povezano s nekim problemima fizike mikrosvijeta (recimo problemom "tamne materije").

Premda pojam neeuklidskih geometrija danas ima uglavnom samo povijesno značenje, jer se ove geometrije proučavaju kao specijalni slučajevi puno općenitijih matematičkih teorija, priča o neeuklidskoj geometriji i dalje je značajna. Ona svjedoči o upornosti matematičara koji su više od dvije tisuće godina rješavali jedan problem, da bi na kraju došli do epohalnih spoznaja o prirodi svijeta u kojemu živimo. U njihovu čast, na kraju ovoga teksta spomenut ćemo imena onih najzaslužnijih za ovu veliku pobjedu ljudskog duha: Euklid iz Aleksandrije (oko 330. pr. n. e. - oko 275. pr. n. e.), Arhimed iz Sirakuze (287. pr. n. e. - 212. pr. n. e.), Apolonije iz Perga (262. pr. n. e. - 190. pr. n. e.), Nasir al-Dinn al-Tusi (1201-1274), Levi ben Gershon (1288-1344), Giovanni Gerolamo Sacchieri (1667-1733), Adrien Marie Legendre (1752-1833), Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1794-1856), Janos Bolyaji (1802-1860), Bernhard Riemmann (1826-1866), Arthur Cayley (1821-1895), Eugenio Beltrami (1835-1900), Felix Klein

(1849-1925), Jules Henri Poincare (1854-1912), Albert Einstein (1879-1955).

Literatura:

A. I. Fetisov - O euklidskoj i neeuklidskim geometrijama
A. S. Mischenko - A. T. Fomenko - A course of differential geometry and topology
G. E. Tauber - Einsteinova opća teorija relativnosti
Wikipedia

Zagreb, rujan 2009.