PROBLEM RASPADNUTE SLAGALICE

O logičkim igrama i teoriji grupa

Slagalica je kutijica ili okvir obično kvadratnog oblika u koji je složen određeni broj kvadratičnih pločica, najčešće njih 15, po četiri u svaki redak odnosno stupac, osim jednog retka/stupca gdje jedna pločica nedostaje (vidi sl. 1). U tu "prazninu" mogu se pomicati susjedne pločice i na taj se način raspored pločica unutar okvira može mijenjati. Pločice mogu biti obilježene brojevima od 1 do 15, a mogu sve zajedno činiti i neku sliku. Igra sa slagalicom sastoji se u tome da se raspored pločica najprije njihovim nasumičnim pomicanjem poremeti, a onda se pokuša vratiti u ono prvobitno "uređeno stanje".
S "problemom raspadnute slagalice" susreo prije više od četvrt stoljeća, tokom jednog putovanja s roditeljima u Madžarsku radi shoppinga. Tamo sam u jednoj trgovini zapazio slagalicu na kojoj je prikazan Pajo Patak na plaži, u vodi do koljena, koji se okreće iza sebe i gleda crvenu morsku zvijezdu smrknutih očiju koja mu se priljepila na stražnjicu. Ova mi se slagalica svidjela, pa sam nagovorio roditelje da mi je kupe. Možda bi mi ta igračka, odnosno igra, vrlo brzo bila dosadila da stvarčica nije bila izrađena vrlo nekvalitetno (kao i većina drugih stvari proizvedenih na tadašnjem "Istoku") - mislim da se već istog onog dana kad je bila kupljena, raspala na sastavne dijelove. Podloga sa stražnje strane odlijepila se od okvira i onih se petnaest pločica rasulo. Bilo mi je tada žao sve to skupa baciti u smeće, pa sam odlučio stvar popraviti - složiti pločice i zalijepiti podlogu za okvir. I tako sam nenadano naletio na jedno meni neobično zanimljivo pitanje - hoću li, nakon što te rasute pločice složim u okvir na proizvoljan način, njihovim pomicanjem uvijek moći dobiti onu "pravu", lijepo složenu sliku Paje Patka? Čini mi se da nisam dugo eksperimentirao - možda sam brzo zaključio da se na taj način baš i ne može dobiti neki siguran odgovor - nego sam krenuo rješavati problem "teorijski". Premda sam tada bio tek na pragu srednje škole, smatrao sam se doraslim jednom takvom zadatku.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Sl. 1 - Slagalica dimenzija 4x4

Međutim, pokazalo se da mu ipak nisam bio dorastao, brzo sam shvatio da je stvar prekomplicirana, pa sam morao odustati. No problem mi je ostao "u glavi" i ja bih mu se vraćao s vremena na vrijeme, kad bi mi iznenada i naizgled bez ikakvog uzroka ili povoda "sinula" nekakva ideja o načinu njegovog rješavanja. No, sve su se te ideje na kraju pokazale beskorisnim. Negdje četiri godine kasnije, slučajno sam nabasao na knjigu "Male priče za bistre glave" čuvenog američkog enigmata i sastavljača šahovskih i matematičkih problema Sama Loyda. Nije bilo teško zaključiti da je moj problem ekvivalentan jednom njegovom koji je on nazvao problemom 14-15, točnije da je njegov problem zapravo kontraprimjer. Taj se problem sastoji u tome da se slagalica kod koje su pločice s oznakama 14 i 15 zamijenjene dovede u "pravilan" poredak. Loyd je onome koji prvi riješi problem ponudio nagradu od 1000$.
Evo što je o tom problemu napisano u Loydovoj knjizi:
"...Nagradu od 1000$ koja je bila ponuđena onome koji prvi pošalje ispravno rješenje nitko nikada nije dobio iako ima na tisuće osoba koje tvrde da su zadatak riješile.
Ljudi su se toliko zanijeli tim problemom da su se počele širiti lude priče o trgovcima koji nisu otvarali dućane, o poštovanom svećeniku koji je stajao ispod ulične svjetiljke cijelu noć na ledenom vjetru pokušavajući se sjetiti kako je vukao pločice prije nego što je one sa 14 i 15 postavio na njihova prava mjesta. U cijeloj toj zagonetki kao da postoji neka misterija: naime, nitko se ne može sjetiti kako je vukao pločice prije nego je riješio problem.
Priča se da su kapetani nasukavali brodove, vlakovođe projurili mimo stanica na kojima su morali stati, a poslovni život u zemlji kao da je izgubio polet. Jedan poznati izdavač iz Baltimorea otišao je na ručak, da bi ga njegovi zabrinuti službenici našli tek poslije ponoći kako pomiče komadiće pite po pladnju..."
Slično kao i ovima koje spominje Loyd, ni meni nikako nije polazilo za rukom riješiti problem, čak ni u vrijeme dok sam studirao na PMF-u. Ipak, na koncu sam uspio, no gotovo dva desetljeća nakon što se problem pojavio. Bio je to opet nenadani bljesak ideje koja je napokon, nakon tolikih promašaja pogodila svoj cilj. No

to rješenje je bilo tako trivijalno da (kao i u nekim drugim sličnim slučajevima) u meni uopće nije pobudilo nekakvu "radost otkrića" ili najobičniji osjećaj uspjeha i/ili zadovoljstva, već razočarenje, deprimirajuće nezadovoljstvo zbog toga što se tako trivijalne stvari nisam sjetio puno ranije, što valjda znači da za matematiku baš i nisam talentiran. No čovjek se može tješiti činjenicom (?) da talenat čini samo 5% uspjeha u nekom poslu.

Evo na kraju i dokaza koji pokazuje da postoje barem dvije "klase" pozicija slagalice, gdje je pozicija proizvoljna permutacija (raspored) onih pločica unutar 4x4 (odnosno nxm) okvira, čiji se elementi ne mogu dobiti iz elemenata one druge klase "regularnim" pomicanjem pločica. Dokaz je ujedno i objašnjenje zašto Sam Loyd (koji je problem očito riješio puno lakše i brže od mene) nikome nije morao dati svojih 1000$ (ako ih je uopće i imao).
Bez smanjenja općenitosti razmotrimo "Loydovu poziciju" kod koje su pločice s oznakama 14 i 15 zamijenile mjesta, dok se sve ostale pločice nalaze na svojim početnim mjestima (praznina se dakle nalazi u donjem desnom uglu). U razmatranju ćemo iskoristiti dva teorema koji se skupa s dokazima mogu naći u bilo kojem udžbeniku teorije grupa.

TM 1

Svaka permutacija može se prikazati kao kompozicija (produkt) transpozicija. (Transpozicija je specijalan slučaj permutacije kod kojega su samo dva elementa zamijenila mjesta dok ostali elementi ostaju na miru).

TM 2

Neka je $\pi = \tau_1 * \tau_2 * ... * \tau_k$ proizvoljni rastav permutacije na produkt transpozicija. Tada broj $\epsilon(\pi) = (-1)^k$ ne ovisi o rastavu. (Taj broj se zove predznak ili parnost permutacije.)
Pretpostavimo da je Loydov problem rješiv. "Loydova pozicija" je, jasno, transpozicija pločica s oznakama 14 i 15 i ona bi se prema pravilima "igre" i TM 1 trebala dobiti kao kompozicija nekog broja transpozicija od kojih svaka uključuju prazno mjesto u slagalici (označimo tu prazninu sa h). Taj element h pri pretpostavljenom nizu "pomaka" odnosno transpozicija opisuje neku "zatvorenu putanju" na plohi slagalice (početna točka putanje podudara se sa konačnom). Očevidno je da se svaka takva zatvorena putanja sastoji od parnog broja "elementarnih pomaka" (pomaka elementa h za jedno mjesto) - koliko je ukupno bilo pomaka u smjeru lijevo toliko mora ukupno biti pomaka u smjeru desno i koliko je ukupno bilo pomaka u smjeru gore toliko mora ukupno biti pomaka u smjeru dolje tako da je ukupni broj pomaka elementa h = 2 * (ukupni broj pomaka elementa h u smjeru lijevo + ukupni broj pomaka elementa h u smjeru gore) što je paran broj. Dakle, ako je Loydov problem rješiv, onda se transpozicija pločica označenih sa 14 i 15 mora moći napisati kao produkt parnog broja transpozicija od kojih svaka uključuje element h, što je prema TM 2 nemoguće (transpozicija elemenata 14 i 15 sama, neparna je permutacija). Dakle Loydov problem nije rješiv, odnosno odgovor na pitanje o raspadnutoj slagalici s Pajom Patkom je negativan.
No ovo nije i kraj. Čitatelj za zadaću treba dokazati da postoje točno dvije klase pozicija jednake kardinalnosti, čiji se elementi ne mogu dobiti iz elemenata one druge klase "regularnim" pomicanjem pločica. Slične probleme čitatelj bi mogao formulirati i riješiti i za slučajeve slagalica nekog drugog tipa poput Rubikove kocke ili poopćenja razmatrane slagalice u n-dimenzija.
Napomenimo da se na osnovi gornjeg rezultata lako se vidi da broj regularnih pozicija slagalice (dimenzija 4x4) iznosi 10461394944000, dakle više od deset bilijuna. Za Rubikovu kocku taj broj, kažu, iznosi 43252003274489856000 (više od četiri milijuna puta više).

Rješenje problema (okrenuti naopako)

Nazovimo "elementarne" pomake (pomake za jedno mjesto) lijevo, desno, gore i dolje praznog mjesta na slagalici (h) regularnim pomacima, a elementarne pomake gore-lijevo, gore-desno, dolje-lijevo i dolje desno (NW, NE, SW, SE) koji inače u igri nisu dozvoljeni dijagonalnim. Vrijede slijedeće dvije propozicije.

PROP 1

Bilo koja pozicija slagalice (permutacija) može se iz neke početne dobiti kao neka kombinacija regularnih i dijagonalnih pomaka elementa h.

DZ - Dovoljno je dokazati da se bilo koja transpozicija dva elementa može dobiti kao ovakva kombinacija i to se prvo vidi za transpoziciju susjednih elemenata, a onda induktivno za transpoziciju bilo koja dva, najprije u istom retku (stupcu), a onda i na proizvoljnim mjestima.

(Pritom se vidi da je ukupni broj dijagonalnih pomaka neparan što navodi na **PROP 2**.)

PROP 2

Svaka pozicija slagalice nastala iz neke početne nizom pomaka među kojima je broj onih dijagonalnih paran, može se dobiti (iz početne pozicije) i nekom kombinacijom regularnih pomaka.

DZ - Napišimo permutaciju (poziciju) slagalice u obliku produkta transpozicija od kojih su neke "dijagonalne" a neke "regularne"

$\pi = r_1*r_2* \ldots *r_{n-1}*d_n*r_{n+1}* \ldots *r_{n-1}*d_n*r_{n+1}* \ldots *r_k$

Dovoljno je promotriti dio ovog produkta oblika $\pi' = d_n*r_{n+1}* \ldots *r_{m-1}*d_m$, gdje su d_n i d_m "susjedne" dijagonalne transpozicije (među njima se nalazi $l = m - n - 1$ regularnih transpozicija). Sad primjenimo indukciju po broju regularnih transpozicija koje stoje između tih dijagonalnih. Ako ne stoji ni jedna ili ako stoji samo jedna, tvrdnja se lako dokazuje provjerom. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $l - 1$. π' možemo napisati i u obliku

$\pi' = d_n*r_{n+1}*d^{-1}*d*r_{n+2}* \ldots *r_{m-1}*d_m$

pa se sad i komadi $d_n*r_{n+1}*d^{-1}$ i $d*r_{n+2}* \ldots *r_{m-1}*d_m$ mogu napisati kao nizovi regularnih transpozicija (ili se iza svakog r ubaci $d^{-1}*d$ pa indukcija ni ne treba), što dokazuje tvrdnju propozicije.

Sad se lako vidi da se svaka pozicija koja nije regularna može napisati u obliku $r_1*r_2* \ldots *r_j*d$, pa regularnih i "neregularnih" pozicija ima isti broj, odnosno (nxm)!/2, gdje su nxm dimenzije slagalice, odakle slijedi da su parne pozicije regularne, a neparne neregularne i da su ta dva skupa čine one dvije klase pozicija (rasporeda) slagalice čiji se elementi ne mogu dobiti jedni iz drugih regularnim pomacima.

Za poopćenje problema u n dimenzija mislim da vrijedi sve isto (premda nije baš jednostavno dokazati pretpostavke indukcije iz **PROP 2**). Što se tiče Rubikove kocke, ljudi tvrde da postoji točno 12 klasa "pozicija" čiji se elementi ne mogu dobiti iz elemenata drugih klasa regularnim pomacima (rotacijama ploha kocke). Kako se to dokazuje - ne znam (možda se nekako mogu prebrojati sve regularne pozicije kocke (?)).

Neki detalji dokaza

Da razmatranje bude jasnije napomenimo da termin "pozicija slagalice" označava "globalni" raspored pločica na slagalici (a ne recimo poziciju neke ili nekih pločica), a da umjesto termina "kompozicija" permutacija (transpozicija) radije koristimo termin "produkt".

Dokazi obje propozicije prilično su jednostavni ako se konkretne pozicije slagalice predoče na neki zgodan način - mogu se napraviti pločice od papirića ili jednostavno crtati pozicije na papiru. Tako recimo tvrdnju **PROP 1** vidimo jednostavno iz crteža - ako na nekom mjestu imamo "transponirana" dva susjedna elementa a i b recimo ovako:

```
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
 .
 .
 .
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
xxx ... xxxxxbaxxxxxxxx ... xxx
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
 .
 .
 .
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxh
```

Onda regularnim pomacima dolazimo do pozicije

```
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
 .
 .
 .
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
xxx ... xxxxxbaxxxxxxxx ... xxx
xxx ... xxxxxxhxxxxxxxx ... xxx
 .
 .
 .
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
```

Pa onda jednim dijagonalnim t(h,b) i s dva regularna t(h,a) i t(h,b) dobijemo a i b na "pravim" mjestima dakle

```
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
 .
 .
 .
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
xxx ... xxxxxabxxxxxxxx ... xxx
xxx ... xxxxxxhxxxxxxxx ... xxx
 .
 .
 .
xxx ... xxxxxxxxxxxxxxx ... xxx
```

Sad element h vratimo u donji desni ugao istim nizom pomaka kojim smo ga doveli ispod elementa a, pa se pozicija sada od one na početku razlikuje samo za transpoziciju t(a,b) - sve je drugo isto.
Ako su transponirani elementi a i b u istom redu, ali nisu jedan kraj drugoga, analogno možemo iskonstruirati niz pomaka kojima se mogu zamijeniti - indukcija (po broju pločica izmedju a i b) nam samo pomaže da puno ne kompliciramo s analizom - pa pomaknemo a za jedno mjesto prema b i onda primjenimo indukciju (ako je između a i b samo jedna pločica (y) stvar se lako vidi iz slike dolje

```
xxx ... xxxxxxx ... xxxxxxxx ... xxx        xxx ... xxxxxxx ... xxxxxxxx ... xxx
 .
 .
 .
xxx ... xxxxxxx ... xxxxxxxx ... xxx        xxx ... xxxxxxx ... xxxxxxxx ... xxx
xxx ... xxxbxxx ... xxxyaxxx ... xxx   >    xxx ... xxxbxxx ... xxxayxxx ... xxx    >    ...
xxx ... xxxxxxx ... xxxxhxxx ... xxx        xxx ... xxxxxxx ... xxxxhxxx ... xxx
 .
 .
 .
xxx ... xxxxxxx ... xxxxxxxx ... xxx        xxx ... xxxxxxx ... xxxxxxxx ... xxx
```

ako a i b nisu u istom retku onda iskoristimo "tranzitivnost" operacije pomaka - a zamijenimo sa elementom c na presjeku redova, onda zamijenimo a sa b, pa c sa c. Sad, pošto se svaka permutacija može dobiti kao produkt (kompozicija) transpozicija parova pločica, za svaku takvu transpoziciju napravimo opisani postupak (pazeći na redosljed) i **PROP 1** je dokazana. Zapravo **PROP 1** je i intuitivno nekako jasna.
U **PROP 2** isto treba analizirati konkretne pozicije - recimo transformacije tipa d'*r*d transformiraju poziciju

```
abc   u   abc   ili   ahc   ili ...
def       dfg         dfb
ngh       nhe         nge
```

(ima par pozicija koje se mogu dobiti, a može se koristiti i simetrija), pa se konkretnom analizom može vidjeti da se te pozicije regularno mogu dovesti u početno stanje. Analogno, dva uzastopna dijagonalna pomaka tipa d*d' transformiraju poziciju

abc u hbc ili abh ili abc
def daf dcf dnf
ngh nge nge hge
(sve druge pozicije su simetrične), a one se isto mogu napisati kao niz regularnih pomaka. Sad primijenimo onu indukciju koja se spominje u dokazu i stvar je riješena.

Tako vidimo da se pozicije slagalice mogu podijeliti na dvije klase - na one koje se mogu dobiti iz osnovne nizom regularnih pomaka i one koje se mogu dobiti nizom pomaka medju kojima je točno jedan dijagonalan. Poziciju iz ove druge klase možemo napisati u obliku
$\pi = r_1*r_2* \ldots *r_{n-1}*d_n*r_{n+1}* \ldots *r_k = r_1*r_2* \ldots *r_{n-1}*d_n*r_{n+1}* \ldots *r_k*d^{-1}*d = r_1'*r_2'* \ldots *r_l'*d$
Jasno je da bez smanjenja općenitosti kao početnu poziciju slagalice možemo uzeti onu u kojoj je element h u donjem desnom uglu, pa je d dijagonalna transpozicija
yx > hx
zh zy
Prema tome, proizvoljna pozicija iz "druge klase" može dobiti nizom regularnih pomaka iz "nove" početne pozicije kod koje je element h pomaknut za jedno mjesto u smjeru NW (dijagonalno) ili drugim riječima iz početne pozicije kod koje su elementi z i y zamijenili mjesta - ako napravimo još dvije regularne transpozicije
hx > zx > zx
zy hy yh
(na Loydovoj 4x4 slagalici to bi bilo kao da su elementi 11 i 15 zamijenili mjesta - uz još malo kombiniranja mogli bismo doći i do one "čuvene" zamjene pločica s oznakama 14 i 15, no to ovdje nije potrebno).
Jasno je da su ove dvije klase disjunktne - u suprotnom bi problem "14-15", odnosno "11-15" bio rješiv. Također je jasno da je moguće konstruirati bijekciju između ove dvije klase - svakom elementu prve klase (skupa pozicija koje se mogu dobiti iz osnovne nizom regularnih pomaka) pridružimo element druge kod kojeg su pločice s oznakama z i y zamijenjene. Pošto je prema **PROP 1** ukupni broj elemenata ove dvije klase jednak (nxm)!, svaka klasa ima (nxm)!/2 elemenata, a pošto parnih pozicija (permutacija) ima upravo toliko, a svaka je pozicija iz prve klase parna, slijedi da je prva klasa zapravo klasa parnih, a druga klasa klasa neparnih pozicija (permutacija skupa od nxm elemenata).

Još neki detalji dokaza

Da bismo dodatno pojasnili identifikaciju gore definiranih skupova (klasa) kao klasa parnih i neparnih permutacija uvedimo malo nove notacije i terminologije.
Definirali smo dakle dvije "klase" odnosno podskupa u skupu svih pozicija - one koje se mogu dobiti nizom regularnih pomaka - označimo ga sa P i one koje se dobiju nizom pomaka od kojih je početni dijagonalan, a svi su drugi regularni - označimo taj skup sa N. Pokazali smo da je podskup N zapravo skup svih pozicija koje se mogu dobiti regularnim pomacima iz početne pozicije koja odgovara onoj "standardnoj" početnoj poziciji kod koje su predzadnji element (pločica) u predzadnjem i predzadnji element (pločica) u zadnjem retku zamijenili mjesta (na 4 x 4 slagalici to odgovara zamjeni pločica s oznakama 11 i 15, pa gore opisane elemente označimo sa "11" i "15"). Takvu početnu poziciju možemo nazvati "n-standardnom" i označiti s n(0), dok onu "standardnu" (sve su pločice na svojim mjestima) možemo označiti s p(0). Jasno je da je p(0) = I "jedinica" u grupi permutacija, a n(0) transpozicija elemenata "11" i "15". Primijetimo da u notaciji koju smo upravo uveli možemo pisati
n(0) = t("11","15") * p(0)
Prema **PROP 1** i **PROP 2** također je jasno da unija ova dva skupa čini skup svih pozicija slagalice. Lako je vidjeti da su podskupovi P i N disjunktni. Jedan je način da se definira (binarna) relacija među pozicijama tako da je jedna pozicija u relaciji s drugom onda i samo onda ako se jedna iz druge može dobiti nizom regularnih pomaka. Odmah se vidi da se radi o relaciji ekvivalencije, pa su podskupovi P i N disjunktne klase ekvivalencije definirane tom relacijom. Drugi način je da pretpostavimo suprotno - da P i N nisu disjunktni. Tada se pozicija koja je element oba podskupa može napisati kao produkt regularnih pomaka (transpozicija) r(1) * ... * r(n) koji "djeluju" na "standardnu" početnu poziciju, p(0), a isto tako i kao produkt regularnih pomaka (transpozicija) r'(1) * ... * r'(m) koji "djeluju" na "n-standardnu" početnu poziciju p(0). Prema tome bi bilo
n(0) = (-r'(m)) * ... *(-r'(1)) * r(1) * ... * r(n) * p(0) (primjetite malu nelogičnost u označavanju - r(n) je prvi "potez" u odnosu na početnu poziciju, a r(1) je zadnji)
što znači da bismo nizom regularnih pomaka (transpozicija) (-r'(m)) *... * (-r'(1)) * r(1) * ... * r(n) mogli "standardnu" početnu poziciju transformirati u "n-standardnu" (dakle onu koja se od prve razlikuje po tome

što su dvije plocice ("11" i "15") zamijenile mjesta), što je nemoguće prema dokazu nemogućnosti rješenja problema "14-15".
Definirajmo sada preslikavanje na skupu P izrazom
p' = t("11","15") * p   (%)
Dokažimo da se ovdje radi o bijekciji sa skupa P u skup N (zapravo se može dokazati da je proizvoljno preslikavanje p' = t(a,b) * p bijekcija P -> N i N -> P).
Da je p' iz N za p iz P moguce je zaključiti već iz zapažanja pri dokazu **PROP 1** da je broj dijagonalnih pomaka pri transpoziciji dva elementa slagalice neparan. Istu stvar vidimo i iz slijedećeg razmatranja.
LEMA 1
Vrijedi
t(a,b) * r(1) * ... * r(n) = r'(1) * ... * r'(n) * t(a,b)
gdje je t(a,b) proizvoljna transpozicija, a r(i) i r'(j) (tj. r(h,p(i)) i r'(h,p(j))) pomaci pločice (transpozicije pločice na slagalici sa praznim mjestom tj. elementom h) pri čemu je
r'(i) = r(i)   - ako r(i) ne uključuje elemente a ili b
r'(h,a) = r(h,b) tj. r'(h,b) = r(h,a)   - ako r(i) uključuje elemente a ili b
DZ
Jasno je da je r(i) * t(a,b) = t(a,b) * r(i) ako r ne uključuje element a ili b. Ako je r oblika r(h,a), tada je jednakost r(h,a) * t(a,b) = t(a,b) * r(h,b) očigledna ako pogledamo konkretnu poziciju - recimo

```
x ... xxxx ... xxx ... x        x ... xxxx ... xxx ... x        x ... xxxx ... xxx ... x
.                               .                               .
.                               .                               .
.                               .                               .
x ... xhbx ... xxx ... x        x ... xhax ... xxx ... x        x ... xahx ... xxx ... x
.                               .                               .
.                             > .                             > .
.                               .                               .
x ... xxxx ... xax ... x        x ... xxxx ... xbx ... x        x ... xxxx ... xbx ... x
.                               .                               .
.                               .                               .
.                               .                               .
x ... xxxx ... xxx ... x        x ... xxxx ... xxx ... x        x ... xxxx ... xxx ... x
```

daje isto kao i t(a,b) * r(h,b).
Ova je tvrdnja intuitivno jasna i zapravo kaže da je svejedno jesmo li dvije pločice preimenovali na početku ili na kraju "igre" (ili u bilo kojem trenutku kad bi se gledalo općenitije).
Sad je jasno da je p' iz izraza (%) pozicija koju dobijamo iz "ne-standardne" početne pozicije nizom regularnih pomaka. Dakle prema gornjem razmatranju p' je u N.
Injektivnost preslikavanja definiranog s (%) slijedi iz injektivnosti transpozicije odnosno permutacije općenito, a surjektivnost slijedi iz definicije preslikavanja (%) i **LEME 1** - proizvoljni element iz N moze se kako smo vidjeli napisati kao
n = r(1) * ... * r(m) * n(0) = r(1) * ... * r(m) * t("11","15") * p(0) = (**LEMA 1**) = t("11","15") * r'(1) * ... * r'(m) * p(0) = t("11","15") * p
gdje je p iz P. Dakle P i N imaju istu kardinalnost, broj elemenata iz P jednak je broju elemenata u skupu parnih permutacija, a svaka permutacija iz P je parna, pa je dakle P skup parnih permutacija, a ostalo (N) je skup neparnih permutacija u skupu permutacija n x m elemenata (odnosno u skupu pozicija slagalice).