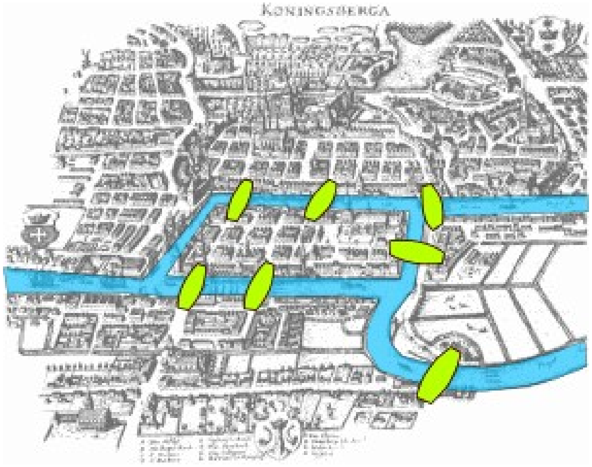
KRATKI UVOD U TOPOLOGIJU

Jednostavan i sažet uvod u topologiju, kojemu je namjera da široj publici barem donekle približi ideju ove matematičke discipline, mogli bismo započeti razmatranjem drevnih ljudskih predodžbi o svijetu u kojemu živimo. Poznata je slika o Svijetu, odnosno Zemlji, kao ravnoj ploči kružnog oblika koju na svojim leđima drže četiri slona, koja opet stoje na oklopu goleme kornjače. Nešto je manje poznata slika koju je zastupao starogrčki filozof Tales iz Mileta, o Zemlji kao otoku ili točnije komadu kopna koji pluta u beskrajnom oceanu. Možda su postojala mišljenja da se i samo kopno (barem u nekom smjeru) proteže u beskonačnost. U ovoj slici s beskrajnim oceanom ili beskrajnim kopnom ili njihovom opet beskrajnom kombinacijom, Svijet bi se dakle mogao smatrati ravninom koja se prostire unedogled u svim smjerovima (zanemarimo sada "nebeske sfere" i sve što se nalazi negdje "gore"). U Staroj se Grčkoj pojavilo i mišljenje da Svijet u kome živimo ima oblik cilindra (valjka), kao i ono koje najviše odgovara stvarnosti - da površina naše planete ima sferični oblik ili drugim riječima da je sama Zemlja kugla.
Geometrijski objekti koje smo upravo spomenuli, a to su krug, ravnina, cilindar i sfera, razlikuju se, dakako po mnoštvu svojstava, ali je za sve njih zajedničko to da se radi o dvodimenzionalnim plohama (razumljivo, jer je površina Zemlje očito nešto dvodimenzionalno). Neki od ovih objekata imaju i druga zajednička svojstva, primjerice, i kružna ploča i sfera i ograničeni cilindar imaju konačnu mjeru površine, pa bi dakle svjetovi u njihovom obliku bili "konačni". Nasuprot tome, ravnina i cilindar koji bi se protezao duž svoje osi rotacione simetrije u beskraj, u oba smjera, očito nemaju konačnu površinu, pa bi odgovarajući svjetovi bili beskonačni, što znači da u takvim svjetovima, pogotovo ako bi se radilo o beskrajnom kopnu, nikada ne bi nastupio problem prenaseljenosti, koji je na sfernoj Zemlji već aktualan. Također, kugla, ravnina i beskonačni cilindar nemaju "rubova", dok ih kružna ploča i ograničeni cilindar imaju (jedan odnosno dva odvojena "ruba", ako se radi samo o "plaštu" cilindra bez baznih ploha), što znači da bi u tom drugom slučaju postojao "kraj svijeta" - nešto kao rub provalije s kojega bismo se možda mogli "strmoglaviti nekamo" (poznata je priča da su se Kolumbovi mornari bojali da bi na svome putovanju na Zapad mogli dospjeti upravo do takvog ruba provalije, odakle se oceanska voda, poput vodopada slijeva nekamo "dolje"). Uz to, možemo primijetiti da su sve nabrojane plohe "povezane", što znači da iz bilo koje točke na nekoj od tih ploha možemo stići (krećući se po neprekinutoj putanji) u bilo koju drugu točku. A da svojstvo povezanosti dvodimenzionalnih "područja" nije baš uvijek nešto trivijalno, možemo se osvjedočiti ako promotrimo samo kopnene dijelove Zemaljske kugle. Ta područja, dakako, nisu povezana - primjerice iz Zagreba ne možemo pješice (dakle samo hodajući), ni "u principu" stići do Australije, pa čak ni do otoka Cresa. No, možemo li pješice, opet "u principu", stići iz Zagreba do Pekinga? Danas je to vjerojatno moguće, no da li bi bilo moguće u slučaju da ne postoje mostovi preko rijeka koje su se isprijećile na tome putu, kao što je to bilo u nekim davnim vremenima? Ovaj zadatak zapravo možemo konkretizirati tako da pretpostavimo da su rijeke jedine prepreke na tom putu, a da putnik ne smije niti u jednom trenutku zagaziti u njihovu vodu, nego da ih mora zaobići, (ovdje zanemarujemo umjetno iskopane kanale koji u ovo naše doba povezuju slivove mogih mora). Pronaći put koji na ovaj način povezuje Zagreb i Peking, nije nimalo jednostavno, a nije baš jednostavno ni pokazati da on postoji, ni u konkretnom (sjetimo se mogućnosti "bifurkacije" rijeka), niti u općenitom slučaju - primijetimo da bi taj put većim dijelom išao razvođem slivova određenog broja mora koja okružuju Euroaziju, pa i nekih jezera (primjerice Kaspijskog).[1]
U čemu je sad veza cijele ove priče o sa topologijom i što je uopće topologija? Kao odgovor na ovo drugo pitanje, mogli bismo reći da je topologija grana matematike koja, za razliku od geometrije koju zanimaju kvantitativna svojstva geometrijskih objekata, proučava njihova kvalitativna svojstva (kao i takva svojstva mnogih drugih još općenitijih i kompliciranijih objekata tj. skupova koji ne spadaju u "uobičajenu" geometriju). A njena veza s gore ispričanom pričom je u tome što se radi upravo o svojstvima koja smo tamo spomenuli - dakle svojstvima povezanosti, ograničenosti, odnosno neograničenosti, konačnosti odnosno beskonačnosti, (primijetimo da neograničenost i beskonačnost nisu jedno te isto), dimenzionalnosti i sl. Zanimljivo je primijetiti kako je začetak "topološke ideje" vezan upravo uz jedan od problema povezanosti

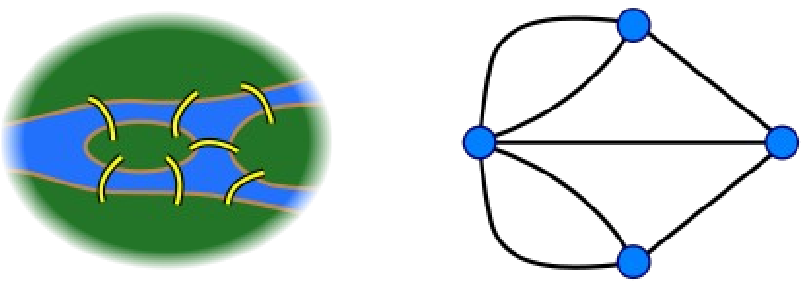
1 S ovim u vezi možemo spomenuti u topologiji vrlo bitan "Jordanov teorem" koji tvrdi da dva područja odvojena neprekidnom zatvorenom linijom nisu povezana, što je očito, ali nimalo nije jednostavno za dokazati.

kopnenih područja odijeljenih riječnim tokom. Radi se o čuvenom "Problemu sedam mostova u Königsbergu", kojega je 1735. godine riješio slavni švicarski matematičar Leonhard Euler. Problem se sastoji u tome da se pronađe put kroz Königsberg toga vremena, grad smješten na dvije obale i dva otoka rijeke Pregel, takav da se svaki od sedam mostova koji su u to doba povezivali ove obale i otoke prijeđe samo jednom. Prikaz grada s mostovima dan je na slici 1.



Slika 1

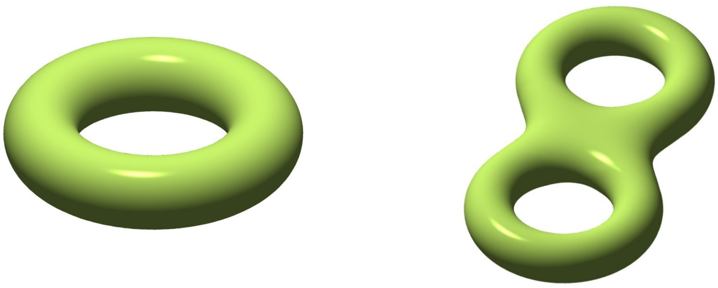
Ideja Eulerovog rješenja sastoji se u tome da se problem svede na jednostavan prikaz, koji se može lako analizirati. Pošto je put koji se prelazi po kopnenom području nevažan za rješenje problema (važan je samo slijed prelazaka mostova), svako od četiri takva područja (lijeva i desna obala rijeke, te manji i veći otok) možemo predočiti kružićem, dok mostove možemo predočiti linijama koje te kružiće povezuju, s tim da su duljina i oblik tih linija također nevažni za rješenje problema - bitno je samo da te linije na odgovarajući način povezuju nacrtane kružiće, dakle kopnena područja. Način na koji je Euler "apstrahirao" problem prikazan je na slici 2.



Slika 2

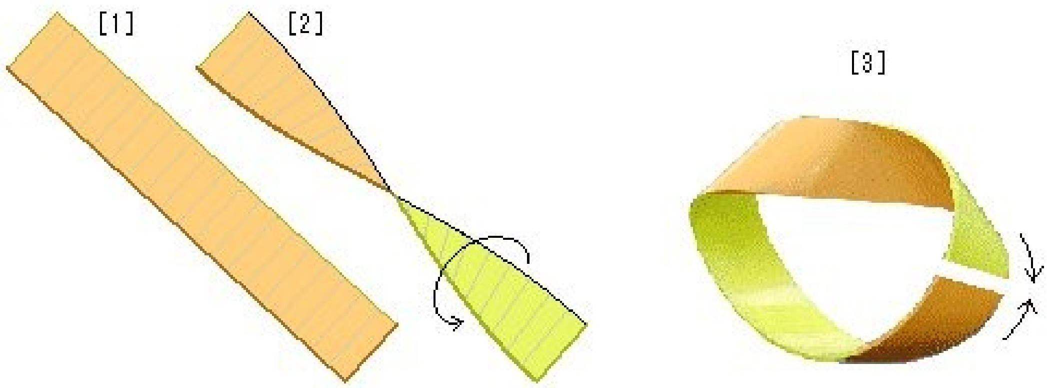
Razmatranjem ove pojednostavljene sheme dolazimo i do rješenja problema, koje se temelji na zapažanju da svakim kopnenim područjem na kojem obilazak grada niti počinje niti završava, "prolazimo" koristeći se dvama mostovima - jednim stupamo na to područje, a drugim ga napuštamo. Dakle da bismo mogli samo jednom prijeći preko svakog mosta, barem dva takva područja morala bi biti povezana s ostalima parnim brojem mostova, što ovdje konkretno nije slučaj - sva su područja s ostalima povezana, kao što vidimo, neparnim brojem mostova, što znači da je rješenje "Problema sedam mostova u Königsbergu" negativno - naime ne postoji put kroz ovaj grad kojim bi se svaki od njegovih mostova prešao samo jednom.
Primijetimo da je pri opisanom svođenju problema na jednostavan prikaz (graf sa slike 2) ostalo "sačuvano" jedino svojstvo povezanosti geometrijskih objekata (ovdje konkretno to bi bili dijelovi grada Königsberga), dok su svi drugi elementi koji ulaze u ovu priču zanemareni - recimo precizan položaj i duljina mostova, veličina otoka i sl. - jer za rješenje problema, kako smo već rekli, uopće nisu važni. U topologiji se i inače elementi problema apstrahiraju na način da "sačuvanima" ostaju jedino ona svojstva razmatranih objekata koja se ne mijenjaju pri određenim "neprekidnim transformacijama". Da bismo pojasnili što ovo zadnje znači,

zamislimo neko geometrijsko tijelo, recimo kuglu, izrađenu od plastelina. Jasno je da se "neprekidnom transformacijom" ove kugle, tj. modeliranjem koje ne uključuje otkidanje komada plastelina ili pravljenje "otvora" unutar njegovog obujma, može dobiti kocka. Čak što više, na ovaj način možemo dobiti sva pravilna geometrijska tijela (a njih ima pet, i to su: kocka, tetraedar, oktaedar, ikozaedar, dodekaedar), kao i beskrajno mnoštvo tijela manje pravilnog ili posve nepravilnog, "krumpirolikog oblika". No, na taj način ne možemo dobiti recimo torus, odnosno tijelo u obliku šalice za čaj, kao niti ono u obliku okvira za naočale ili recimo paške čipke. U tom smislu govorimo da su sva geometrijska tijela, koja se mogu dobiti "neprekidnom transformacijom" kugle, "topološki ekvivalentna" ili "homeomorfna", tj. da se sa stajališta topologije mogu na određeni način identificirati (kao što su topološki ekvivalentni torus i šalica za čaj ili okvir za naočale i lonac uobičajenom obliku, sa dvije "ručke" - ove dvije topološke forme, "jednostruki" i "dvostruki" torus, prikazane su na slici 3).[2]



Slika 3

Ova priča ne vrijedi, dakako, samo za trodimenzionalna geometrijska tijela, već i za (geometrijske) objekte drugih dimenzionalnosti. Tako krug i pravokutnik predstavljaju u ovom smislu topološki ekvivalentne dvodimenzionalne objekte koji nisu ekvivalentni recimo cilindričnoj ili sfernoj površini. Inače, zanimljivo je primijetiti da "topološki neekvivalentne" forme možemo dobiti jedne iz drugih "lijepljenjem" njihovih dijelova, što si jednostavno možemo predočiti igrom sa dvodimenzionalnim geometrijskim figurama načinjenim od papira. Primjerice, lijepljenjem nasuprotnih stranica pravokutnika, dobivamo cilindričnu površinu (cilindar) koja topološki nije "ekvivalentna" pravokutniku. A ako jednu stranicu pravokutnika najprije "zaokrenemo" za 180^{o}, a onda zalijepimo uz drugu, dobivamo "möbiusovu vrpcu", plohu s mnogim zanimljivim svojstvima, koja topološki nije "ekvivalentna" ni pravokutniku niti cilindru. Način na koji nastaje möbiusova vrpca prikazan je na slici 4.



Slika 4

Možda se nekome može učiniti da su ovakve "igre" s geometrijskim objektima nešto beskorisno i besmisleno, te da se s idejom o opisanoj vrsti njihove identifikacije ne može daleko dogurati, no treba reći da ovo

2 U engleskoj Wikipediji pod pojmom "topologija" može se vidjeti zgodna animacija koja opisuje "topološku ekvivalentnost" torusa i šalice za čaj.

predstavlja tek početak priče o topologiji u kojoj se proučavaju i mnoge druge vrste "topološke ekvivalentnosti", i to ne samo onoga što smatramo geometrijskim objektima, nego (kako smo to već ranije spomenuli) i mnogobrojnih drugih vrlo apstraktnih objekata tj. skupova. Ovakav dojam uostalom opovrgava i izuzetno dinamičan razvoj topologije u posljednjih stotinjak godina, odnosno bogatstvo rezultata koje je u tom vremenu topologija ostvarila, kao i mnoštvo njihovih primjena u raznim područjima znanosti, posebice u matematici samoj, zbog čega se topologija danas smatra jednom od temeljnih matematičkih disciplina. Bit je ove ideje zapravo u tome što nam ona omogućava da proučavamo geometrijske i razne druge "apstraktnije" objekte koje ni intuitivno niti racionalno ne možemo pojmiti. Određeno pojašnjenje možda nam može dati sljedeća karakterizacija ove grane matematike koja potječe od Henrya Poincarea, francuskog matematičara koji se može smatrati jednim od njezinih utemeljitelja, u modernom smislu te riječi, a koja datira s kraja XIX stoljeća - *"Analysis situs* (Poincare je umjesto termina "topologija" koristio termin "poziciona analiza") *je znanost koja nam omogućava da shvatimo kvalitativna svojstva geometrijskih figura, ne samo u "običnom" prostoru, već također i u prostorima sa više od tri dimenzije. Analysis situs u tri dimenzije za nas predstavlja gotovo posve intuitivno znanje, no u više od tri dimenzije javljaju se ogromne poteškoće i napor da se one prebrode predstavlja stvar od izuzetne važnosti za znanost."*

Inače, osim L. Eulera, uz čije se ime veže i jedan značajan topološki pojam - tzv. Eulerova karakteristika, broj koji opisuje "oblik" topološkog prostora[3], izuzetno značajnu ulogu u predhistoriji topologije odigrao je i veliki njemački matematičar Bernhard Riemann, koji je sredinom XIX st. razvio svoju metodu "geometrijske reprezentacije" u teoriji funkcija, kao i koncept "mnogostrukosti". No, topologija kao zasebna grana matematike, razvija se tek od konca XIX stoljeća. Začetkom onoga što danas nazivamo algebarskom topologijom, smatra se rad već spomenutog H. Poincarea, pod nazivom "Analysis situs", dok su radovi njemačkih matematičara Georga Cantora i Felixa Hausdorffa gotovo istodobno označili početak razvoja onoga što danas nazivamo skupovno-teorijskom ili općom topologijom. Uz upravo spomenute grane topologije, postoji i geometrijska topologija koja se počela razvijati nešto kasnije.

Kao što smo već ranije naglasili, topologija danas predstavlja jednu od "osnovnih" matematičkih disciplina, koja nalazi svoju primjenu u mnogim drugim područjima matematike, ali i u drugim znanostima, posebice u teorijskoj fizici. Primjerice, jedan od najvažnijih suvremenih topoloških rezultata, dokaz tzv. "Poincareove hipoteze" (sve zatvorene i jednostruko povezane trodimenzionalne mnogostrukosti homeomorfne su trodimenzionalnoj "sferi" (S^3)), odnosno klasifikacija kompaktnih trodimenzionalnih mnogostrukosti, koje je pred desetak godina izveo kontroverzni ruski matematičar Grigorij Pereljman, zasigurno mnogo govori i o prirodi (obliku) Svemira u kojemu živimo.

Od matematičara naročito zaslužnih za razvoj topologije u XX stoljeću možemo spomenuti još i imena Francuza M. Frescheta, Nizozemca L. E. Brouwera, Nijemca H. Hopfa, Amerikance S. Lefschetza, J. W. Alexandera i H. Whitneya, te ruske matematičare P. S. Aleksandrova, P. S. Urysona, A. N. Kolmogorova, A. N. Tihonova i L. S. Pontrjagina. Poljak K. Kuratowski dao je definiciju topološkog prostora koja se koristi i danas. Od hrvatskih matematičara, značajan trag ovdje su ostavili akademici Pavle Papić (1919-2005) i Sibe Mardešić (1927). Profesor Papić predavao je autoru ovih redaka matematičku analizu (na zagrebačkom PMF-u), prije četvrt stoljeća i ostao mu je u lijepoj uspomeni, a udžbenik "Matematička analiza" profesora Mardešića, odigrao je značajnu ulogu u njegovom obrazovanju.

Literatura:

Yu. Borisovich et al. - Introduction to topology
Wikipedija

3 Euler je uočio da za bilo koji konveksni poliedar vrijedi formula:

$$V - E + F = 2$$

gdje je V broj vrhova poliedra, E broj njegovih rubova (stranica), a F broj njegovih ploha. Zbog toga govorimo da konveksni poliedar, ali i bilo koje drugo konveksno geometrijsko tijelo, s obzirom da se ono može "aproksimirati" pomoću poliedra s vrlo velikim brojem ploha (stranica, vrhova), ima Eulerovu karakteristiku jednaku 2. Pojam Eulerove karakteristike (geometrijskog tijela) može se generalizirati i za dimenzije veće od 3.

Zagreb, svibanj 2012.