DODATAK II

Wiener-Hopfova metoda u rješavanju integralnih jednadžbi

1. Homogene integralne jednadžbe

U poglavlju **II**-2 računa se slobodna energija modela 8V koristeći zapis svojstvene vrijednosti 8V-transfer matrice, kao funkcije jednog Baxterovog parametra, u obliku produkta dviju kompleksnih funkcija, analitičkih i različitih od nule na nekim poluravninama u **C** čiji presjek čini prugu u kompleksnoj ravnini. Ovakva faktorizacija, koju smo nazvali Wiener-Hopfovom, osnovna je ideja Wiener-Hopfove metode rješavanja nekih integralnih jednadžbi. Ovom ćemo metodom ovdje (formalno) riješiti jednu klasu, prvo homogenih, a u drugom poglavlju i nehomogenih integralnih jednadžbi da bismo ilustrirali ove ideje, a ujedno i izveli neke rezultate koje koristimo u **II**-2.

Razmotrimo kompleksnu funkciju $f:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ za koju postoji Fouurierov transformat

$$F(k)=\int_{R} f(x)\cdot\exp(ikx)dx \qquad (1)$$

Ovdje će nas zanimati uvjeti pod kojima je kompleksna funkcija F analitička. Da bismo ih istražili, napišimo f kao sumu

$$f(x)=f_+(x)+f_-(x)$$

gdje su funkcije $f_\pm$ dane sa

$$f_+=\begin{cases} f(x) & , x>0 \\ 0 & , x<0\end{cases} \quad , \quad f_-(x)=\begin{cases} f(x) & , x<0 \\ 0 & , x>0\end{cases} \qquad (2)$$

Sada je Fourierov transformat F funkcije f, suma Fourierovih transformata F_+ i F_- funkcija f_+ i f_- . Teorija integralnih transformacija dolazi do sljedećeg rezultata (v. npr. [ST] TM8.1 i TM8.2 str.222,224)

TM 1

Ako funkcija f_+ oblika (2) zadovoljava uvjet $|f_+(x)|<M\cdot\exp(\tau_-x)$, $M,\tau_-\in\mathbf{R}$, $x\to\infty$, tada je njen Fourierov transformat $F_+(k)=\int_{R_+} f_+(x)\cdot\exp(ikx)dx$ analitička funkcija varijable $k=\sigma+i\tau$ u području $\mathrm{Im}(k)>\tau_-$ i u tome području je $F_+(k)\to 0$ za $|k|\to\infty$. Funkciju f_+ možemo izraziti preko F_+ sa

$$f_+(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} F_+(k)\cdot\exp(-ikx)dk \quad , \quad \tau>\tau_- \qquad (3)$$

Za $\tau_->0$, dakle za funkcije f_+ koje u beskonačnosti trnu, područje analitičnosti od F_+ sadrži realnu os, pa se integracija u (3) može izvršiti duž realne osi. Za $\tau_-<0$, odnosno funkcije f_+ koje u beskonačnosti rastu, ali ne brže od eksponencijalne funkcije (sa linearnim eksponentom), područje analitičnosti od F_+ leži iznad realne osi.

Posve analogno, ako funkcija f_- oblika (2) zadovoljava uvjet $|f_-(x)|<M\cdot\exp(\tau_+x)$, $M,\tau_+\in\mathbf{R}$, $x\to-\infty$, njen je Fourierov transformat $F_-(k)=\int_{R_-} f_-(x)\cdot\exp(ikx)dx$ analitička funkcija varijable k u području $\mathrm{Im}(k)<\tau_+$.

Funkciju $f_-(x)$ možemo izraziti sa

$$f_-(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} F_-(k)\cdot\exp(-ikx)dk \quad , \quad \tau<\tau_+$$

Za $\tau_+>0$ područje analitičnosti funkcije F_- sadrži realnu os.

Iz ovog razmatranja vidimo da za $\tau_-<\tau_+$, funkcija F(k) zadana sa (1) je analitička na traci $\tau_-<\mathrm{Im}(k)<\tau_+$, a funkcija f je povezana sa F inverznom Fourierovom transformacijom

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty+i\tau}^{\infty+i\tau} F(k)\cdot\exp(-ikx)dk$$

gdje se integrira po proizvoljnom pravcu paralelnom sa x osi što leži u prugi $\tau_-<\tau<\tau_+$. Specijalno, za $\tau_-<0$ i $\tau_+>0$ ova se integracija može izvršiti po realnom pravcu.

Razmotrimo homogenu integralnu jednadžbu oblika

$u(x)=\lambda\int_0^\infty v(x-s)u(s)\,ds$ (4)

čija je jezgra $v(\xi)$, $\xi=x-s$ definirana za sve $\xi\in\mathbf{R}$. Pretpostavimo da je ovom jednadžbom definirana (općenito kompleksna) funkcija čija domena sadrži cijeli realni pravac i definirajmo funkcije

$$u_+=\begin{cases} u(x) & , x>0 \\ 0 & , x<0\end{cases} \quad , \quad u_-(x)=\begin{cases} u(x) & , x<0 \\ 0 & , x>0\end{cases}$$

Sada je $u=u_++u_-$ i jednadžba (4) se svodi dvije jednadžbe

$u_+(x)=\lambda\int_0^\infty v(x-s)u_+(s)\,ds$, za $x>0$ (5)

$u_-(x)=\lambda\int_0^\infty v(x-s)u_+(s)\,ds$, za $x<0$

od kojih je prva integralna jednadžba za u_+ dok je druga eksplicitni izraz za u_- kada znamo u_+ .
Pretpostavimo da funkcija $v(\xi)$ iz (4) zadovoljava uvjete

$|v(\xi)|<M\cdot\exp(\tau_-\xi)$, za $\xi\to\infty$, $|v(\xi)|<M\cdot\exp(\tau_+\xi)$, za $\xi\to-\infty$

gdje je $\tau_-<0$, $\tau_+>0$. Sada je prema TM 1 funkcija

$V(k)=\int_R v(\xi)\exp(ik\xi)d\xi$

je analitička na prugi $\tau_-<\mathrm{Im}(k)<\tau_+$. Razmotrimo rješenje u_+ od (5) koje zadovoljava uvjet

$|u_+(x)|<M_1\exp(\mu x)$, za $x\to\infty$ (6)

gdje je $\mu<\tau_+$. Sada se oba integrala u (5) mogu ocijeniti veličinom $\lambda[\int_0^{M'} v(x-s)u_+(s)ds$ $+M\cdot M_1\exp(\mu x)\int_{M'}^\infty \exp(-(\tau_+-\mu)s)ds]$, pa oni konvergiraju. Drugi se integral za slučaj $x\to-\infty$ može također ocijeniti sa $M\cdot\exp(\tau_+x)\int_0^\infty \exp(-\tau_+s)u_+(s)ds=M_2\exp(\tau_+x)$, pa dakle vrijedi ocjena

$|u_-(x)|<M_2\exp(\tau_+x)$, za $x\to\infty$ (7)

Odavde i iz ocjene (6) slijedi da su Fourierovi transformati $U_+(k)$ i $U_-(k)$ funkcija $u_+(x)$ i $u_-(x)$ analitičke funkcije varijable k, i to $U_+(k)$ u području $\mathrm{Im}(k)>\mu$, a $U_-(k)$ u području $\mathrm{Im}(k)<\tau_+$.
Napišimo integralnu jednadžbu (4) u obliku

$u_+(x)+u_-(x)=\lambda\int_R v(x-s)u_+(s)ds$

Desna je strana očito konvolucija $v*u_+$ pa primjenom Fourierove transformacije dobivamo

$U_+(k)+U_-(k)=\lambda V(k)U_+(k)$

Stavljanjem $L(k)=1-\lambda V(k)$ dobivamo funkcionalnu jednadžbu

$L(k)U_+(k)+U_-(k)=0$ (8)

koja uključuje dvije nepoznate funkcije $U_+(k)$ i $U_-(k)$. Ideja Wiener-Hopfove metode je da jednadžbu (8) napišemo u obliku

$L_+(k)U_+(k)=-L_-(k)\,U_-(k)$ (9)

gdje je član slijeva analitička funkcija na poluravnini $\mathrm{Im}(k)>\mu$, a onaj zdesna analitička funkcija na poluravnini $\mathrm{Im}(k)<\tau_+$, a oba se člana podudaraju na prugi $\mu<\mathrm{Im}(k)<\tau_+$. Sada prema TM o analitičkom produljenju (v. npr. [LŠ] TM1 str.87) postoji cijela funkcija koja na $\mathrm{Im}(k)>\mu$ koincidira sa lijevom, a na $\mathrm{Im}(k)<\tau_+$ s desnom stranom u (9).
Da bismo jednadžbu (4) mogli riješiti Wiener-Hopfovom metodom, funkcija $L(k)$ mora biti oblika $L(k)=\dfrac{L_+(k)}{L_-(k)}$, gdje su $L_+(k)$ i $L_-(k)$ analitičke na $\mathrm{Im}(k)>\mu$ odnosno na $\mathrm{Im}(k)<\tau_+$. Pretpostavimo također da postoje $M'',\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ takvi da vrijede ocjene

$|L_+(\xi)|<M''\cdot\exp(\alpha\xi)$, za $\xi\to\infty$, $|L_-(\xi)|<M''\cdot\exp(\beta\xi)$, za $\xi\to-\infty$

Relacija (9) sada definira cijelu funkciju koja u beskonačnosti ne raste brže nego funkcija k^n , $n\in\mathbf{N}$ i ova funkcija prema Liouvilleovom teoremu (v. npr. [LŠ] TM2 str.60 ili TM2 str.86) mora biti polinom, najviše n-tog stupnja. Prema tome, Fourierovi transformati $U_+(k)$ i $U_-(k)$ funkcija $u_+(x)$ i $u_-(x)$ koje su rješenja jednadžbi (5) što zadovoljavaju uvjete (6) tj. (7) dani su sa

$$U_+(k)=\frac{P_n(k)}{L_+(k)} \quad , U_-(k)=-\frac{P_n(k)}{L_-(k)} \qquad (10)$$

Tako smo našli rješenje u(x) jednadžbe (4) do na n koeficijenata polinoma P_n koje nalazimo iz dodatnih uvjeta problema.

2. Nehomogene integralne jednadžbe i opća shema Wiener-Hopfove metode

Opći problem koji se može riješiti Wiener-Hopfovom metodom je funkcionalna jednadžba

$$A(k)\Psi_+(k)+B(k)\Psi_-(k)+C(k)=0 \qquad (11)$$

koju treba riješiti po Ψ_+,Ψ_- na prugi $\tau_-<\mathrm{Im}(k)<\tau_+$ pri čemu postavljamo zahtjev da je Ψ_+ analitička na poluravnini $\mathrm{Im}(k)>\tau_-$, Ψ_- analitička na poluravnini $\mathrm{Im}(k)<\tau_+$ i da obje teže prema nuli za $|k|\to\infty$ u području njihove analitičnosti. Istovremeno su A(k), B(k), C(k) analitičke funkcije na prugi $\tau_-<\mathrm{Im}(k)<\tau_+$ i A(k) i B(k) su na toj prugi različite od nule.

Slično kao i prije pretpostavimo da kvocijent $\frac{A(k)}{B(k)}$ možemo napisati u obliku

$$\frac{A(k)}{B(k)}=\frac{L_+(k)}{L_-(k)} \qquad (12)$$

gdje su funkcije $L_+(k)$ i $L_-(k)$ analitičke i različite od nule u poluravninama $\mathrm{Im}(k)>\tau'_-$ odnosno $\mathrm{Im}(k)<\tau'_+$ s tim da pruge $\tau_-<\mathrm{Im}(k)<\tau_+$ i $\tau'_-<\mathrm{Im}(k)<\tau'_+$ imaju neprazan presjek.

Ovako se naša funkcionalna jednadžba (11) svodi na

$$L_+(k)\Psi_+(k)+L_-(k)\Psi_-(k)+L_-(k)\frac{C(k)}{B(k)}=0$$

Pretpostavimo da se zadnji član ove jednadžbe možemo pisati u obliku

$$L_-(k)\frac{C(k)}{B(k)}=D_+(k)+D_-(k) \qquad (13)$$

gdje su funkcije $D_+(k)$ i $D_-(k)$ analitičke u poluravninama $\mathrm{Im}(k)>\tau''_-$ odnosno $\mathrm{Im}(k)<\tau''_+$, a tri pruge $\tau_-<\mathrm{Im}(k)<\tau_+$, $\tau'_-<\mathrm{Im}(k)<\tau'_+$ i $\tau''_-<\mathrm{Im}(k)<\tau''_+$ imaju neprazan presjek. Ako je taj presjek pruga $\tau^o_-<\mathrm{Im}(k)<\tau^o_+$ tada na toj prugi vrijedi

$$L_+(k)\Psi_+(k)+D_+(k)=-L_-(k)\Psi_-(k)-D_-(k) \qquad (14)$$

Sada je opet član slijeva analitička funkcija na poluravnini $\tau^o_-<\mathrm{Im}(k)$, a onaj zdesna analitička funkcija na poluravnini $\mathrm{Im}(k)<\tau^o_+$, dok se na prugi $\tau^o_-<\mathrm{Im}(k)<\tau^o_+$ ti članovi podudaraju, pa prema TM o analitičkom produljenju postoji cijela funkcija P(k) koja na $\mathrm{Im}(k)>\tau^o_-$ koincidira sa lijevom, a na $\mathrm{Im}(k)<\tau^o_+$ s desnom stranom u (14). Ako funkcije $L_\pm(k), D_\pm(k)$ u područjima svoje analitičnosti ne rastu u beskonačnosti brže od polinoma k^n, $n\in\mathbf{N}$, tada iz uvjeta $\Psi_\pm(k)\to 0$ za $|k|\to\infty$ slijedi da P(k) mora biti polinom najviše n-tog stupnja. Označimo taj polinom sa $P_n(k)$. Tako dobivamo poopćenje relacija (10) odnosno izraze za $\Psi_+(k)$, $\Psi_-(k)$ izvjesne do na n koeficijenata polinoma $P_n(k)$

$$U_+(k)=\frac{P_n(k)-D_+(k)}{L_+(k)} \quad , U_-(k)=-\frac{P_n(k)+D_-(k)}{L_-(k)}$$

Opravdanost pretpostavki (12) i (13) na kojima se bazira Wiener-Hopfova metoda dokazuju sljedeće LEME

LEMA 1

Neka je funkcija F(k) analitička na prugi $\tau_-<\mathrm{Im}(k)<\tau_+$ i neka na toj prugi uniformno teži prema nuli za $|k|\to\infty$. Tada se na ovoj prugi može napisati u obliku

$$F(k)=F_+(k)+F_-(k)$$

gdje je $F_+(k)$ analitička na poluravnini $\mathrm{Im}(k)>\tau_-$, a $F_-(k)$ analitička na poluravnini $\mathrm{Im}(k)<\tau_+$

DZ Razmotrimo proizvoljnu točku k_o iz zadane pruge i pravokutnik abcd koji je podskup te pruge i čije su dvije stranice leže na pravcima $\mathrm{Im}(k)=\tau'_-$ odnosno $\mathrm{Im}(k)=\tau'_+$, dok druge dvije leže na pravcima $\mathrm{Re}(k)=-A$ odnosno $\mathrm{Re}(k)=A$. Prema Cauchyevom teoremu (v. npr. [LŠ] TM1 str.59) vrijedi

$$F(k_o)=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{-A+i\tau'_-}^{A+i\tau'_-}+\int_{A+i\tau'_-}^{A+i\tau'_+}+\int_{A+i\tau'_+}^{-A+i\tau'_+}+\int_{-A+i\tau'_+}^{-A+i\tau'_-}\right)\frac{F(\zeta)}{\zeta-k_o}d\zeta$$

Uzmimo da je $A\to\infty$. Pošto F(k) teži uniformno prema nuli za $|k|\to\infty$, drugi i četvrti član ove sume iščezavaju. Tako nam ostaje

$F(k_o)=F_+(k_o)+F_-(k_o)$ (15)

gdje su $F_+(k_o)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\tau'_-}^{\infty+i\tau'_-}\frac{F(\zeta)}{\zeta-k_o}d\zeta$, $F_-(k_o)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty+i\tau'_+}^{\infty+i\tau'_+}\frac{F(\zeta)}{\zeta-k_o}d\zeta$.

Ovi integrali definiraju analitičke funkcije varijable k_o ako k_o ne leži na konturi integracije (v. npr. razmatranje [ST] str.53). Tako je specijalno $F_+(k_o)$ analitička u poluravnini $Im(k_o)>\tau'_-$, dok je $F_-(k_o)$ analitička u poluravnini $Im(k_o)<\tau'_+$. Pošto je pruga $\tau_-<Im(k)<\tau_+$ otvoren skup, vidimo da je $F_+(k_o)$ analitička i na $Im(k_o)>\tau_-$, a $F_-(k_o)$ na $Im(k_o)<\tau_+$ kako i treba□

LEMA 2

Neka je funkcija $\Phi(k)$ analitička i različita od nule na prugi $\tau_-<Im(k)<\tau_+$ i neka teži uniformno prema jedinici na toj prugi za $|k|\to\infty$. Tada se na ovoj prugi može napisati u obliku

$\Phi(k)=\Phi_+(k)\cdot\Phi_-(k)$

gdje je $\Phi_+(k)$ analitička i različita od nule na poluravnini $Im(k)>\tau_-$, a $\Phi_-(k)$ analitička i različita od nule na poluravnini $Im(k)<\tau_+$

DZ Razmotrimo funkciju $F(k)=\ln[\Phi(k)]$. Pošto je $\Phi(k)\neq 0$ na prugi $\tau_-<Im(k)<\tau_+$, funkciju $F(k)$ možemo, na ovoj prugi napisati u obliku

$$F(k)=\int_{k_o\ \Gamma}^{k}\frac{\Phi'(k')}{\Phi(k')}dk'+C$$

gdje krivulja Γ leži unutar spomenute pruge. Odavde vidimo da je na prugi $\tau_-<Im(k)<\tau_+$ $F(k)$ analitička funkcija. Osim toga, $F(k)$ na toj prugi uniformno teži prema nuli za $|k|\to\infty$. Prema tome, funkcija $F(k)$ zadovoljava uvjete LEME 1, pa za nju postoji prikaz $F(k)=F_+(k)+F_-(k)$, gdje $F_+(k)$, $F_-(k)$ zadovoljavaju uvjete navedene u istoj LEMI. Ako stavimo $\Phi_+(k)=\exp(F_+(k))$, $\Phi_-(k)=\exp(F_-(k))$, funkcije $\Phi_+(k)$, $\Phi_-(k)$ će zadovoljavati te iste uvjete, dakle $\Phi_+(k_o)$ će biti analitička u poluravnini $Im(k)>\tau_-$, dok će $\Phi_-(k)$ biti analitička u poluravnini $Im(k)<\tau_+$ i bit će $\Phi(k)=\Phi_+(k)\cdot\Phi_-(k)$□

Razmotrimo nehomogenu integralnu jednadžbu

$$u(x)=\lambda\int_0^\infty v(x-s)u(s)\,ds+f(x) \qquad (16)$$

gdje pretpostavljamo da funkcije $v(\xi)$, $f(\xi)$ zadovoljavaju uvjete

$|v(\xi)|<M\cdot\exp(\tau_-\xi)$, za $\xi\to\infty$, $|v(\xi)|<M\cdot\exp(\tau_+\xi)$, za $\xi\to-\infty$ (17)

$|f(\xi)|<M\cdot\exp(\tau_-\xi)$, za $\xi\to\infty$, $|f(\xi)|<M\cdot\exp(\tau_+\xi)$, za $\xi\to-\infty$

i gdje tražimo rješenje $u(x)$ koje zadovoljava uvjet $|u_+(x)|<M_1\exp(\mu x)$, za $x\to\infty$, $\mu<\tau_+$.

Primjetimo da se ova integralna jednadžba svodi na jednadžbu oblika (11). Naime, primjenom postupka iz prvog dijela, dakle raspisivanjem funkcija $u(x)$, $f(x)$ u obliku $u_+(x)+u_-(x)$ tj. $f_+(x)+f_-(x)$ i Fourier-transformiranjem jednadžbe (16), dobivamo jednadžbu

$U_+(k)+U_-(x)=\lambda V(k)U_+(k)+F_+(k)+F_-(k)$ (18)

gdje su $U_\pm(k)$, $F_\pm(k)$, $V(k)$ Fourierovi transformati od $u_\pm(x)$, $f_\pm(x)$, $v(x)$, koja vrijedi na prugi $\tau_-=\mu<Im(k)<\tau_+$. Stavimo $L(k)=1-\lambda V(k)$. Prema TM 1 ova je funkcija analitička na prugi $\tau_-<Im(k)<\tau_+$ i na toj prugi uniformno teži prema jedinici za $|k|\to\infty$. Prema tome, ako $L(k)$ nema nultočki na prugi $\tau_-<Im(k)<\tau_+$, tada ona zadovoljava uvjete LEME 2 i može se napisati u obliku

$$L(k)=\frac{L_+(k)}{L_-(k)}$$

gdje su $L_+(k)$ i $L_-(k)$ analitičke na $Im(k)>\tau_-$ odnosno na $Im(k)<\tau_+$. Sada se (18) svodi na

$L_+(k)U_+(k)+L_-(k)U_-(x)-L_-(k)F_-(k)-L_-(k)F_+(k)=0$

Da bismo ovaj izraz sveli na (14) zadnji njegov član se treba napisati u obliku

$L_-(k)F_+(k)=D_+(k)+D_-(k)$ (19)

gdje su $D_+(k)$ i $D_-(k)$ analitičke na $Im(k)>\tau_-$ odnosno na $Im(k)<\tau_+$. Mogućnost ovakve reprezentacije osigurava LEMA 1 jer je $F_+(k)$ analitička na poluravnini $Im(k)>\tau_-$ i prema (17) teži uniformno prema nuli za $|k|\to\infty$, dok prema integralnoj reprezentaciji funkcija $F_+(k)$, $F_-(k)$ iz (15) zaključujemo da su ove funkcije ograničene na prugi $\tau_-<Im(k)<\tau_+$. Prema tome, ispunjeni su uvjeti LEME 1 pa vrijedi (19). Sada uz uvjet da funkcije $L_\pm(k)$, $D_\pm(k)$ u područjima svoje analitičnosti ne rastu u beskonačnosti brže od polinoma k^n, $n\in\mathbf{N}$, iz gornjeg razmatranja zaključujemo da se Fourierovi transformati $U_+(k)$ i $U_-(k)$ funkcija $u_+(x)$ i $u_-(x)$ čija suma daje rješenje jednadžbe (16) mogu napisati u obliku

$$U_{+}(k)=\frac{P_n(k)+D_{+}(k)}{L_{+}(k)} \quad , \; U_{-}(k)=-\frac{P_n(k)+L_{-}(k)F_{-}(k)+D_{-}(k)}{L_{-}(k)}$$

gdje je $P_n(k)$ polinom n-tog stupnja čiji se koeficijenti određuju iz rubnih uvjeta.